Sarjat ja integraalit

Versio: 9.3.2011
Viimeksi muokannut: Peter Hästö

Sisältö

Esipuhe

Tämä moniste vastaa sisällöltään aikaisempaa monistetta “Analyysi I”. Monisteeseen ilmaantunee pieniä korjauksia kurssin kuluessa, eli ei välttämättä kannata tulostaa sitä kokonaisuudessaan etukäteen, vaan sitä mukaan kuin materiaalia tarvitsee.

Ensimmäinen luku on osittain päällekkäinen Euklidisen topologian kurssin kanssa. Sarjat ja integraalit alkaa funktioiden raja-arvon ja jatkuvuuden nopealla kertaamisella, josta siirrytään käsittelemään ensimmäisenä uutena teemana funktion tasaista jatkuvuutta.

Luku 1

Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

1.1 Peruskäsitteitä

Kerrataan aluksi peruskäsitteitä kurssista PM I. Funktio $f\colon A \to B$ on sääntö, joka liittää jokaiseen *määritysjoukon* eli *lähtöjoukon* $A = D_f$ alkioon x yksikäsitteisesti jonkin *maalijoukon* B alkion y, merkitään $y = f(x)$. Joukko

$$R_f = \{y \in B \mid y = f(x),\ x \in A\}$$

on funktion f *kuva-* eli *arvojoukko*. Tätä merkitään usein myös $f(A)$. Funktiota $f\colon A \to B$ sanotaan

(1) *surjektioksi*, jos $R_f = B$,

(2) *injektioksi*, jos on voimassa ehto

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2),$$

(3) *bijektioksi*, jos se on injektio ja surjektio.

Injektion ehdon voi ilmaista myös muodossa

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Esimerkki 1.1.1. Olkoon $f\colon A \to B, f(x) = x^2$.

(1) Jos $A = B = \mathbb{R}$ eli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, niin f ei ole injektio ($f(-x) = f(x)$) eikä surjektio ($-1 \notin R_f$)).

(2) Jos $A = \mathbb{R}$ ja $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ eli $f\colon \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, niin f on surjektio, mutta ei ole injektio.

(3) Jos $A = B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ eli $f\colon \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, niin f on surjektio ja injektio ($f(x_1) = f(x_2) \implies x_1^2 = x_2^2 \implies x_1 = x_2$, sillä x_1, $x_2 \geq 0$), joten f on bijektio.

Huomautus 1.1.2. Ellei toisin mainita, niin tällä kurssilla käytetään seuraavaa sopimusta: Kun funktio f on annettu lausekkeena, niin sen määritysjoukko D_f on laajin mahdollinen reaalilukujen osajoukko, jossa lauseke on mielekäs. Esimerkiksi funktion $f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{\sqrt{x+5}}$ määritysjoukko on

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5 \text{ ja } x \neq 3\}.$$

Olkoon E perusjoukko ja A, $B \subseteq E$. Tällöin

(i) $A^{\complement} = \{x \in E \mid x \notin A\}$ on joukon A *komplementti*,

(ii) $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$ on joukkojen A ja B *unioni* eli *yhdiste*,

(iii) $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}$ on joukkojen A ja B *leikkaus*,

(iv) $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ja } x \notin B\}$ on joukkojen A ja B (joukko-opillinen) *erotus*.

Unionille, leikkaukselle ja komplementille pätevät *De Morganin lait*:

$$(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement},$$
$$(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}.$$

Näiden todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

Määritelmä 1.1.3. Pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ *(ε-säteiseksi) ympäristöksi* sanotaan väliä $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ (ts. siinä ovat ne $x \in \mathbb{R}$, joiden etäisyys pisteestä x_0 on (aidosti) pienempi kuin ε). Joukkoa $A \subseteq \mathbb{R}$ sanotaan *avoimeksi*, jos jokaisella joukon A pisteellä on ympäristö, joka sisältyy joukkoon A. Joukkoa $A \subseteq \mathbb{R}$ sanotaan *suljetuksi*, jos sen komplementti

$$A^{\complement} = \mathbb{R} \setminus A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin A\}$$

on avoin.

Esimerkki 1.1.4. Väli $]0, 1[$ on avoin joukko. Väli $A = [0, 2]$ on suljettu, sillä $A^{\complement} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ tai } x > 2\}$ on avoin. Jokainen äärellinen pistejoukko $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ on suljettu. Erityisesti *yksiö* $\{x_1\}$ on suljettu.

Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ sekä tyhjä joukko $\emptyset$ ovat sekä avoimia että suljettuja (nämä ovat ainoat joukon $\mathbb{R}$ osajoukot, joilla on tämä ominaisuus).

Määritelmä 1.1.5. Pistettä $x_0 \in \mathbb{R}$ sanotaan joukon $A \subseteq \mathbb{R}$ *kasautumispisteeksi*, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen piste $x \in A$, että $x \neq x_0$ ja

$$|x - x_0| < \varepsilon.$$

Määritelmän tarkoitus: x_0 on joukon $A \subseteq \mathbb{R}$ kasautumispiste, jos jokainen pisteen x_0 ympäristö $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ sisältää joukon A pisteen, joka ei ole x_0.

Esimerkki 1.1.6. (1) Joukon $]0, 1[$ kasautumispisteiden joukko on $[0, 1]$.

(2) Joukon $]0, 1[\cup \{2\}$ kasautumispisteiden joukko on $[0, 1]$.

(3) Joukolla $\{0, 1\}$ ei ole kasautumispisteitä.

(4) Joukon $\{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \ldots\}$ kasautumispisteiden joukko on $\{0\}$.

(5) Joukon $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ kasautumispisteiden joukko on $[0, 1]$.

Varoitus: Kasautumispiste ei välttämättä kuulu joukkoon.

Lause 1.1.7. *Piste $x_0 \in \mathbb{R}$ on joukon $A \subseteq \mathbb{R}$ kasautumispiste jos ja vain jos on olemassa sellainen jono (x_n), että $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ ja*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Todistus. "$\Rightarrow$": Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ joukon A kasautumispiste. Tällöin jokaista $n = 1, 2, \ldots$ kohti on olemassa sellainen $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$, että

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n}.$$

Jonolle (x_n) pätee nyt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \text{ siten, että } |x_n - x_0| < \varepsilon, \text{ kun } n \geq n_\varepsilon \\ &\Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \text{ pätee } x_{n_\varepsilon} \in A,\ x_{n_\varepsilon} \neq x_0 \text{ ja } |x_{n_\varepsilon} - x_0| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow x_0 \text{ on joukon } A \text{ kasautumispiste.} \end{aligned}$$

□

Suljettua joukkoa voidaan luonnehtia myös seuraavalla tavalla (tulosta ei todisteta tällä kurssilla).

Seuraus 1.1.8. *Joukko $A \subseteq \mathbb{R}$ on suljettu jos ja vain jos A sisältää kaikkien suppenevien jonojensa raja-alkiot.*

Huomautus 1.1.9. (1) Topologiassa seuraus 1.1.8 on myös suljetun joukon määritelmä.

(2) Lauseen 1.1.7 nojalla seuraus 1.1.8 saadaan seuraavaan muotoon: Joukko $A \subseteq \mathbb{R}$ on suljettu jos ja vain jos A sisältää kaikki kasautumispisteensä.

1.2 Funktion raja-arvo

Määritelmä 1.2.1. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ funktio ja $x_0 \in \mathbb{R}$ joukon A kasautumispiste. Lukua $a \in \mathbb{R}$ sanotaan funktion f *raja-arvoksi* pisteessä x_0, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ ja } x \in A.$$

Tällöin merkitään $f(x) \to a$, kun $x \to x_0$, tai

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

Huomautus 1.2.2. (1) Määritelmässä δ riippuu vain luvusta ε ja pisteestä x_0.

(2) Raja-arvo on lokaali ominaisuus: vain se, mitä tapahtuu pisteen x_0 mielivaltaisen pienessä ympäristössä vaikuttaa funktion f raja-arvoon pisteessä x_0.

(3) Funktion ei tarvitse olla määritelty pisteessä x_0 ja vaikka se olisikin määritelty, niin sen arvo pisteessä x_0 ei vaikuta raja-arvoon. Tämä on tärkeää myös derivaatan määritelmässä (ks. PM I): $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$, jos

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

on olemassa. Huomaa, että erotusosamäärää ei ole määritelty pisteessä $x = x_0$.

(4) Jos raja-arvo on olemassa, se on yksikäsitteinen (todistus harjoituksena).

Esimerkki 1.2.3. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$. Osoitetaan, että $\lim_{x\to 2} f(x) = 11$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tutkitaan, miten $\delta > 0$ on valittava, jotta $|f(x) - 11| < \varepsilon$, kun $0 < |x - 2| < \delta$. Nyt

$$|f(x) - 11| = |5x + 1 - 11| = |5x - 10| = 5|x - 2| < \varepsilon,$$

kun $0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$, joten voidaan valita $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Täten $\lim_{x\to 2} f(x) = 11$. Esimerkiksi $|f(x) - 11| < \frac{1}{1000} = \varepsilon$, kun $0 < |x - 2| < \frac{1}{5000}$.

Esimerkki 1.2.4. Olkoon $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$. Osoitetaan, että $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (vaikka funktiota f ei ole määritelty pisteessä $x = 0$).

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin

$$|f(x) - 0| = \left|\frac{x^2}{|x|} - 0\right| = |x| < \varepsilon,$$

kun $0 < |x - 0| < \varepsilon$, joten voidaan valita $\delta = \varepsilon$ määritelmässä 1.2.1.

Esimerkki 1.2.5. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ja $x_0 \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Osoitetaan, että $\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0^2$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen ja $x_0 \in \mathbb{R}$. Selvästi

$$|f(x) - x_0^2| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0|.$$

Jos $|x - x_0| \leq 1$, niin

$$|x + x_0| \leq |x - x_0| + 2|x_0| \leq 2|x_0| + 1.$$

Tästä seuraa, että

$$|x^2 - x_0^2| \leq (2|x_0| + 1)|x - x_0| < \varepsilon,$$

kun

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1} \quad \text{ja} \quad |x - x_0| < 1.$$

Valitaan $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}\right\}$, jolloin

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{kun } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Jos esimerkiksi $x_0 = 2$ ja $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, niin $|f(x) - 4| < \frac{1}{1000}$, kun $0 < |x - 2| < \frac{1}{5000}$.

Lause 1.2.6 (funktion raja-arvon jonokarakterisaatio)**.** *Jos $f\colon A \to \mathbb{R}$, x_0 on joukon A kasautumispiste ja $a \in \mathbb{R}$, niin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$*,*

(ii) Jokaiselle jonolle (x_n), jolle $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ ja $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, pätee

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

Todistus. "(i)⇒(ii)": Olkoon $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. Olkoot lisäksi $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ ja $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Osoitetaan, että $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ ja } x \in A.$$

Koska $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, niin on olemassa sellainen n_δ, että

$$0 < |x_n - x_0| < \delta, \text{ kun } n \geq n_\delta \quad (\text{oletetuksen mukaan } x_n \neq x_0).$$

Siten

$$|f(x_n) - a| < \varepsilon, \text{ kaikilla } n \geq n_\delta,$$

joten $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

"(ii)⇒(i)": Tehdään vastaoletus: (i) ei toteudu eli on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että jokaista $\delta > 0$ kohti on olemassa $x \in A$, jolle

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{ja} \quad |f(x) - a| \geq \varepsilon.$$

Valitaan $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Tällöin jokaista $n \in \mathbb{Z}_+$ kohti on olemassa sellainen $x_n \in A$, että

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{ja} \quad |f(x_n) - a| \geq \varepsilon.$$

Täten $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, mutta jono $(f(x_n))$ ei suppene kohti lukua a. Tämä on ristiriita. □

Esimerkki 1.2.7. Osoitetaan, että funktiolla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

ei ole raja-arvoa pisteessä 0.

Olkoot $x_n = -\frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Silloin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

mutta

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} -1 = -1 \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Lauseen 1.2.6 nojalla $\lim_{x\to 0} f(x)$ ei ole olemassa.

Esimerkki 1.2.8. Osoitetaan, että funktiolla $f\colon\ ]0, \infty[\ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ei ole raja-arvoa pisteessä 0.

Olkoon $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Silloin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,$$

mutta jono $(f(x_n)) = (n)$ hajaantuu. Lauseen 1.2.6 nojalla $\lim_{x\to 0} f(x)$ ei ole olemassa.

Esimerkki 1.2.9. Osoitetaan, että funktiolla $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ ei ole raja-arvoa pisteessä 0.

Olkoot $x_n=\dfrac{1}{2\pi n}$, $y_n=\dfrac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$, $n=1,2,\ldots$ Silloin

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n=0,$$

mutta

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sin(2\pi n)=\lim_{n\to\infty} 0=0$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n)=\lim_{n\to\infty}\sin\Big(2\pi n+\frac{\pi}{2}\Big)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Lauseen 1.2.6 nojalla $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ei ole olemassa.

Edelliset esimerkit (joissa raja-arvoa ei ole olemassa) voidaan todistaa myös muodollisesti raja-arvon määritelmän 1.2.1 avulla tekemällä vastaoletus ja johtamalla ristiriita.

1.3 Funktion jatkuvuus

Määritelmä 1.3.1. Olkoon $A\subseteq\mathbb{R}$, $f\colon A\to\mathbb{R}$ ja $x_0\in A$. Funktiota f sanotaan *jatkuvaksi* pisteessä x_0, jos jokaista $\varepsilon>0$ kohti on olemassa sellainen $\delta>0$, että

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\quad \text{kun } |x-x_0|<\delta \text{ ja } x\in A.$$

Funktiota f sanotaan *jatkuvaksi joukossa* A, jos se on jatkuva joukon A jokaisessa pisteessä. Jos funktio ei ole jatkuva, sitä sanotaan epäjatkuvaksi.

Huomautus 1.3.2. (1) Kuten raja-arvo, myös jatkuvuus on lokaali ominaisuus: vain se, mitä tapahtuu pisteen x_0 mielivaltaisen pienessä ympäristössä vaikuttaa funktion f jatkuvuuteen pisteessä x_0.

(2) Jos f ei ole määritelty pisteessä x_0, niin ei ole mielekästä tutkia funktion f jatkuvuutta pisteessä x_0.

Esimerkki 1.3.3. (1) Olkoon $f\colon\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$. Usein funktion f sanotaan olevan epäjatkuva pisteessä 1, vaikka sitä ei ole määritelty pisteessä 1.

(2) Olkoon $g\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{x}$. Usein funktion g sanotaan olevan epäjatkuva pisteessä 0, vaikka sitä ei ole määritelty nollassa. (Jos funktiolle määritellään arvo nollassa, niin saatu funktio on väistämättä epäjatkuva joukossa $\mathbb{R}$.)

(3) Olkoon $h\colon\ \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ \to\mathbb{R}$, $h(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$. Funktio h on jatkuva välillä $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Jatketaan h jaksollisesti joukkoon

$$A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

asettamalla $h(x+\pi)=h(x)$. Nyt $h: A\to\mathbb{R}$ on jatkuva (eikä epäjatkuva, kuten saattaisi luulla).

Esimerkki 1.3.4. Osoitetaan, että funktio $f\colon\ ]0,\infty[\ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ on jatkuva välillä $]0,\infty[$.

Olkoon $x_0 > 0$ kiinteä ja $\varepsilon > 0$. Olkoon lisäksi $x > 0$. Selvästi

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|xx_0|} = \frac{1}{xx_0}|x - x_0|.$$

Jos $|x - x_0| < \dfrac{1}{2}x_0$, niin $x > \dfrac{1}{2}x_0$ ja edelleen

$$\frac{1}{xx_0} < \frac{2}{x_0^2}.$$

Tästä seuraa, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{2}{x_0^2}|x - x_0|, \quad \text{kun } |x - x_0| < \frac{1}{2}x_0.$$

Toisaalta

$$\frac{2}{x_0^2}|x - x_0| < \varepsilon, \quad \text{kun } |x - x_0| < \frac{1}{2}x_0^2\varepsilon.$$

Valitaan $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}x_0, \frac{1}{2}x_0^2\varepsilon\right\}$, jolloin

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{kun } |x - x_0| < \delta.$$

Siten f on jatkuva pisteessä x_0.

Lause 1.3.5 (jatkuvuuden jonokarakterisaatio)**.** *Funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in A$ jos ja vain jos*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

kaikilla jonoilla (x_n), joille pätee $x_n \in A$, $n = 1, 2, \ldots$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Todistus. Kuten lause 1.2.6 raja-arvolle. □

Huomautus 1.3.6. (1) Lauseen 1.3.5 väitteessä on pieniä eroja vastaavaan lauseeseen 1.2.6 verrattuna: lukujonon (x_n) termi voi olla myös x_0 eikä pisteen x_0 tarvitse olla kasautumispiste.

(2) Lauseen ehto voidaan myös kirjoittaa muodossa:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

jolloin yhtälön vasemman puolen täytyy olla olemassa ja oikean puolen täytyy olla määritelty. Tämä on kurssilla PM I esiintynyt määritelmä jatkuvuudelle.

(3) Jos $x_0 \in A$ ei ole joukon A kasautumispiste, niin on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että

$$]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\ \cap A = \{x_0\}.$$

Tällaisissa, ns. eristetyissä, pisteissä f on automaattisesti jatkuva määritelmän 1.3.1 nojalla.

Esimerkki 1.3.7. Esimerkkejä erityyppisistä epäjatkuvuuksista:

(1) hyppäysepäjatkuvuus pisteessä 0:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases}$$

(2) karkaaminen äärettömyyteen pisteessä 0:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

(3) heilahteluepäjatkuvuus pisteessä 0:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Esimerkki 1.3.8. Osoitetaan, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

on epäjatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$.

Jaetaan tarkastelu kahteen osaa sen mukaan, onko x_0 rationaalinen vai irrationaalinen.

(1) Olkoon ensin $x_0 \in \mathbb{Q}$. Koska irrationaaliluvut ovat tiheässä joukossa $\mathbb{R}$, niin on olemassa jono $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $n = 1, 2, \dots$, jolle pätee

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Silloin

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq 1 = f(x_0),$$

joten f ei ole jatkuva pisteessä x_0 lauseen 1.3.5 nojalla.

(2) Olkoon seuraavaksi $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Koska rationaaliluvut ovat tiheässä joukossa $\mathbb{R}$, niin on olemassa jono $x_n \in \mathbb{Q}$, $n = 1, 2, \dots$, jolle pätee

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Silloin

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = f(x_0),$$

joten f ei ole jatkuva pisteessä x_0 lauseen 1.3.5 nojalla.

Esimerkki 1.3.9. Osoitetaan, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = \dfrac{1}{k} \quad \text{jollakin} \quad k = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

on epäjatkuva joukossa $E = \left\{0, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots\right\}$ ja jatkuva joukossa $\mathbb{R} \setminus E$.

Jos $x_0 \in \mathbb{R} \setminus E$, niin on olemassa sellainen $r > 0$, että

$$]x_0 - r, x_0 + r[\cap E = \emptyset.$$

Nyt $f(x) = 0$ kaikilla $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, joten vakiofunktiona f on jatkuva pisteessä x_0.

Jos $x_0 \in E$, niin on kaksi vaihtoehtoa: joko $x_0 = 0$ tai $x_0 = \dfrac{1}{k}$ jollakin $k = 1, 2, \dots$

Oletetaan ensin, että $x_0 = 0$. Olkoon $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Silloin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = f(0),$$

joten f ei ole jatkuva pisteessä 0.

Oletetaan sitten, että $x_0 = \dfrac{1}{k}$ jollakin $k = 1, 2, \ldots$ Olkoon $x_n = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Silloin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{k}$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq 1 = f\left(\frac{1}{k}\right) = f(x_0),$$

joten f ei ole jatkuva pisteessä $x_0 = \dfrac{1}{k}$.

Esimerkki 1.3.10 (varsin patologinen tapaus)**.** Olkoon $f\colon\ ]0,1[\ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{jos } x = \frac{m}{n},\ n > 0,\ \mathrm{syt}(n,m) = 1 \text{ (supistettu muoto)}, \\ 0, & \text{jos } x \in\ ]0,1[\ \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Seuraavassa on muutamia funktion f arvoja:

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n}, \qquad f\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) = f\Big(\frac{n-1}{n}\Big) = \frac{1}{n},$$

$$f\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = 0, \qquad f\Big(\frac{3}{7}\Big) = \frac{1}{7} \qquad f\Big(\frac{4}{6}\Big) = f\Big(\frac{2}{3}\Big) = \frac{1}{3}.$$

Lisäksi jos $f(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n}$, niin $f(1 - \frac{m}{n}) = f(\frac{n-m}{n}) = \frac{1}{n}$.

Huomaa, että jos $n \in \mathbb{Z}_+$, niin lukuja $x \in\ ]0,1[$, joille $f(x) \geq \frac{1}{n}$, on vain äärellinen määrä. Näin on, sillä jos $f(x) \geq \frac{1}{n}$, niin

$$x = \frac{p}{q}, \quad \text{missä } \frac{1}{q} \geq \frac{1}{n}.$$

Tästä seuraa, että $q \leq n$ ja $p \leq n - 1$, joten lukuja $0 < x < 1$, joille pätee $f(x) \geq \frac{1}{n}$ on korkeintaan $n(n-1)$ kappaletta.

Osoitetaan, että tämä ns. Dirichlet'n funktio f on jatkuva jokaisessa irrationaalipisteessä ja epäjatkuva jokaisessa rationaalipisteessä. Väite saadaan, kun todistetaan, että

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \text{kaikilla } x_0 \in\ ]0,1[.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Silloin on olemassa sellainen n, että

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Koska $f(x) \geq \frac{1}{n}$ vain äärellisen monella (korkeintaan $n(n-1)$) muuttujan x arvolla, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ei sisällä pisteitä $x \in\ ]0,1[\ \cap \mathbb{Q}$, $x \neq x_0$, joille $f(x) \geq \frac{1}{n}$. Tästä seuraa, että

$$|f(x) - 0| = f(x) < \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{kun } 0 < |x - x_0| < \delta,$$

sillä tällaisille x joko $f(x) = 0$ tai $f(x) = \frac{1}{q}$ jollakin $q > n$. Siten $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ kaikilla $x_0 \in]0,1[$. Näin ollen f on jatkuva täsmälleen niissä pisteissä x_0, joissa $f(x_0) = 0$.

Voidaan todistaa, että ei ole olemassa funktiota, joka olisi jatkuva jokaisessa rationaalipisteessä ja epäjatkuva jokaisessa irrationaalipisteessä. Tätä ei todisteta tällä kurssilla. Seuraavassa on lueteltu muutamia jatkuvien funktioiden perusominaisuuksia.

(1) Alkeisfunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan. Alkeisfunktioita ovat polynomit, rationaali-, eksponentti-, logaritmi-, potenssi-, trigonometriset ja ns. algebralliset funktiot sekä näistä äärellisellä määrällä funktioiden peruslaskutoimituksia, kääntämisiä ja yhdistämisiä saadut funktiot. Alkeisfunktioita ovat siis esimerkiksi $x^2 - 3$, $\frac{x-1}{x^3+2}$, e^x, $\log_3(4x + 1)$, $x^{\sqrt{2}}$, $\cos(3x)$, $|x|$ ja $\overline{\arc}\sin\left(\frac{\tan x + \ln|x-2|}{(\frac{2}{3})^x + \sqrt[5]{x^4 + \sin x}}\right)$.

(2) Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia pisteessä x_0, niin myös funktiot

$$f \pm g, \quad cf \quad (c \in \mathbb{R}), \quad fg, \quad \frac{f}{g} \quad (g(x_0) \neq 0), \quad |f|,$$
$$\min\{f, g\}, \quad \max\{f, g\}$$

ovat jatkuvia pisteessä x_0.

(3) Jos f on jatkuva pisteessä x_0 ja g on jatkuva pisteessä $f(x_0)$, niin yhdistetty funktio $g \circ f$ on jatkuva pisteessä x_0.

Esimerkiksi funktio $f(x) = \frac{1}{x}$ on jatkuva pisteessä $x_0 \neq 0$ ja funktio $g(x) = \sin x$ on jatkuva pisteessä $f(x_0) = \frac{1}{x_0}$, joten funktio $(g \circ f)(x) = \sin \frac{1}{x}$ on jatkuva pisteessä $x_0 \neq 0$.

(4) Suppiloperiaate funktioille: Jos f, g, $h \colon A \to \mathbb{R}$ ovat sellaisia funktioita, että f ja g ovat jatkuvia pisteessä $x_0 \in A$,

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ kaikilla } x \in A$$

ja

$$f(x_0) = h(x_0) = g(x_0),$$

niin myös h on jatkuva pisteessä x_0. Tämä tulos seuraa suoraan lauseista B.1.17 ja 1.3.5.

Määritelmä 1.3.11. Funktiota $f \colon A \to \mathbb{R}$ sanotaan *rajoitetuksi*, jos sen kuvajoukko

$$R_f = f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ jollakin } x \in A\}$$

on rajoitettu eli on olemassa sellainen vakio $M \geq 0$, että

$$|f(x)| \leq M \quad \text{kaikilla } x \in A.$$

Lause 1.3.12. *Suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu.*

Todistus. Tehdään vastaoletus: f ei ole rajoitettu. Tällöin jokaista $n \in \mathbb{Z}_+$ kohti on olemassa sellainen $x_n \in [a, b]$, että

$$|f(x_n)| > n.$$

Koska $x_n \in [a, b]$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, niin jono (x_n) on rajoitettu. Bolzanon–Weierstrassin lauseen nojalla sillä on suppeneva osajono (x_{n_k}), eli

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0$$

jollakin $x_0 \in \mathbb{R}$. Koska $a \le x_{n_k} \le b$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$, niin epäyhtälön säilymisen periaatteen nojalla $a \le x_0 \le b$, ts. $x_0 \in [a, b]$ (tässä on olennaista, että väli on suljettu).

Edelleen, koska

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0, \quad x_0 \in [a, b] \quad \text{ja} \quad f \text{ on jatkuva välillä } [a, b],$$

niin jatkuvuuden jonokarakterisaation nojalla

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0).$$

Tästä seuraa, että $(f(x_{n_k}))$ on suppenevana jonona rajoitettu. Tämä on ristiriita, sillä

$$|f(x_{n_k})| > n_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

missä $n_k \to \infty$, kun $k \to \infty$. $\square$

Huomautus 1.3.13. Edellisessä lauseessa on olennaista, että väli on suljettu: funktio $f\colon\ ]0, 1[\ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ on jatkuva välillä $]0, 1[$, mutta ei ole rajoitettu. Toisaalta on olennaista, että funktio on jatkuva: funktio

$$f\colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

ei ole rajoitettu suljetulla välillä $[0, 1]$.

Kertaus: Funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ saavuttaa suurimman arvonsa joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$, jos $\max f(A)$ on olemassa eli on olemassa sellainen $x_0 \in A$, että

$$f(x) \le f(x_0) \quad \text{kaikilla } x \in A.$$

Silloin

$$f(x_0) = \max_{x\in A} f(x) = \sup_{x\in A} f(x).$$

Vastaavasti f saavuttaa pienimmän arvonsa joukossa A, jos $\min f(A)$ on olemassa eli on olemassa sellainen $x_0 \in A$, että

$$f(x) \ge f(x_0) \quad \text{kaikilla } x \in A.$$

Silloin

$$f(x_0) = \min_{x\in A} f(x) = \inf_{x\in A} f(x).$$

Lause 1.3.14 (Weierstrassin max-min-lause)**.** *Suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa.*

Todistus. Lauseen 1.3.12 nojalla funktio f on rajoitettu. Täydellisyysaksiooman nojalla

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = M \in \mathbb{R}$$

on olemassa. Osoitetaan seuraavaksi, että on olemassa sellainen $x_0 \in [a, b]$, että $f(x_0) = M$ (jolloin $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$).

Lauseen A.0.35 nojalla jokaista $n \in \mathbb{Z}_+$ kohti on olemassa sellainen $x_n \in [a, b]$, että

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M.$$

Koska $a \leq x_n \leq b$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, niin (x_n) on rajoitettu jono. Bolzanon–Weierstrassin lauseen nojalla tällä on suppeneva osajono (x_{n_k}), joten raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in \mathbb{R}$$

on olemassa. Koska $a \leq x_{n_k} \leq b$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$, niin epäyhtälön säilymisen periaatteen nojalla $a \leq x_0 \leq b$, joten $x_0 \in [a, b]$ (tässä on olennaista, että väli on suljettu, vrt. lauseen 1.3.12 todistukseen). Koska

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M \quad \text{kaikilla } k = 1, 2, \ldots,$$

niin suppiloperiaatteen nojalla

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M.$$

Koska f jatkuva pisteessä x_0, niin jatkuvuuden jonokarakterisaation nojalla

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M.$$

Minimiä koskeva väite todistetaan vastaavalla tavalla (harjoitustehtävä). □

Huomautus 1.3.15. Edellisessä lauseessa on olennaista, että väli on suljettu: funktio $f\colon\ ]0,1[\ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ on jatkuva, mutta ei saavuta suurinta eikä pienintä arvoa välillä $]0, 1[$. Huomaa, että

$$\inf_{x\in]0,1[} f(x) = 0 \quad \text{ja} \quad \sup_{x\in]0,1[} f(x) = 1,$$

mutta minimiä tai maksimia ei ole olemassa.

On myös olennaista, että väli on rajoitettu: funktio $f\colon\ [1,\infty[\ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ on jatkuva, mutta ei saavuta pienintä arvoa välillä $[1, \infty[$. Huomaa, että

$$\inf_{x\in[1,\infty[} f(x) = 0.$$

Lause 1.3.16. *Oletetaan, että $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Jos $f(a) < 0 < f(b)$ tai $f(a) > 0 > f(b)$, niin on olemassa sellainen $x_0 \in\ ]a, b[$, että $f(x_0) = 0$.*

Todistus. Oletetaan, että $f(a) < 0 < f(b)$ (tapauksen $f(a) > 0 > f(b)$ voi tämän jälkeen hoitaa tarkastelemalla funktiota $g = -f$, joka on jatkuva ja jolle $g(a) < 0 < g(b)$).

Väitteen voi todistaa kahdella eri tavalla: käyttämällä täydellisyysaksioomaa suoraan tai jonojen ja suljettujen välien periaatteen avulla. Olkoon

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}.$$

Koska $a \in A$, niin $A \neq \emptyset$. Lisäksi $A \subseteq [a, b]$ on (ylhäältä) rajoitettu, joten $x_0 = \sup A$ on olemassa. Osoitetaan, että $f(x_0) = 0$.

Jos $f(x_0) < 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $f(x) < 0$ kaikilla $|x - x_0| < \delta$ (ks. harjoituksen 6 tehtävä 2). Erityisesti $f(x_0 + \frac{\delta}{2}) < 0$, ts. $x_0 + \frac{\delta}{2} \in A$ eikä x_0 ole joukon A yläraja.

Jos $f(x_0) > 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $f(x) > 0$ kaikilla $|x - x_0| < \delta$. Lisäksi x_0 on joukon A yläraja, joten $x \notin A$ kaikilla $x \in\ ]x_0 - \delta, b]$. Tällöin kuitenkin $x_0 - \frac{\delta}{2}$ on joukon A yläraja eikä x_0 voi olla pienin yläraja. Näin ollen on oltava $f(x_0) = 0$.

Toinen tapa todistaa väite on käyttää jonoja ja aiemmasta tuttua puolitusmenetelmää. Olkoon $I_1 = [a_1, b_1]$, missä $a_1 = a$ ja $b_1 = b$ ja sen keskipiste

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Jos $f(c_1) = 0$, niin haettu piste on löydetty ja $x_0 = c_1$.

Jos $f(c_1) \neq 0$, niin joko $f(c_1) > 0$ tai $f(c_1) < 0$. Jos $f(c_1) > 0$, niin valitaan $a_2 = a_1$ ja $b_2 = c_1$. Jos $f(c_1) < 0$, niin valitaan $a_2 = c_1$ ja $b_2 = b_1$. Kummassakin tapauksessa siis $I_2 = [a_2, b_2] \subseteq I_1$ ja $f(a_2) < 0 < f(b_2)$.

Jatketaan näin: jos välit I_1, $I_2, \ldots, I_n$ on valittu kuten edellä ja

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

on välin $I_n = [a_n, b_n]$ keskipiste, niin valitaan väli $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq I_n$ siksi välin $I_n = [a_n, b_n]$ puolikkaaksi, jolle $f(a_{n+1}) < 0 < f(b_{n+1})$.

Jos $f(c_n) = 0$ jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$, niin valitaan $x_0 = c_n$ ja väite on todistettu.

Jos valintaprosessi ei pysähdy vaan $f(c_n) \neq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, niin saamme jonon sisäkkäisiä suljettuja välejä $I_n = [a_n, b_n]$, joille pätee

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots, \quad f(a_n) < 0 < f(b_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Suljettujen välien periaatteen nojalla on olemassa

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Välien pituudet

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \to 0, \qquad \text{kun } n \to \infty.$$

Koska $a_n \leq x_0 \leq b_n$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, niin

$$0 \leq x_0 - a_n \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \quad \text{ja} \quad 0 \leq b_n - x_0 \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}.$$

Tässä $\frac{b-a}{2^{n-1}} \to 0$, kun $n \to \infty$, joten suppiloperiaatteen nojalla

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Koska f on jatkuva pisteessä x_0, niin jatkuvuuden jonokarakteriaation nojalla

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Koska $f(a_n) < 0$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, niin epäyhtälön säilymisen periaatteen nojalla

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0.$$

Toisaalta $f(b_n) > 0$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, joten

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0.$$

Tästä seuraa, että $f(x_0) = 0$. □

Lause 1.3.17 (Bolzanon lause)**.** *Oletetaan, että* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on jatkuva. Jos* $y \in \mathbb{R}$ *on sellainen luku, että*

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le y \le \sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

niin on olemassa sellainen $x_0 \in [a,b]$*, että* $f(x_0) = y$*.*

Todistus. Weierstrassin lauseen (lause 1.3.14) mukaan on olemassa sellaiset x_1, $x_2 \in [a,b]$, että

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1) \le y \le f(x_2) = \max_{x\in[a,b]} f(x) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Jos $x_1 = x_2$, niin

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) = f(x_1) \quad \text{kaikilla } x \in [a,b],$$

joten

$$f(x) = f(x_1) \quad \text{kaikilla } x \in [a,b]$$

ja f on vakiofunktio. Oletetaan sitten, että $x_1 < x_2$ (tapaus $x_1 > x_2$ todistetaan samalla tavalla). Funktio

$$g\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - y$$

on jatkuva,

$$g(x_1) = f(x_1) - y \le 0 \quad \text{ja} \quad g(x_2) = f(x_2) - y \ge 0.$$

Jos $g(x_k) = 0$ toisella $k = 1$, 2, niin valitaan $x_0 = x_k$. Muutoin $g(x_1) < 0$ ja $g(x_2) > 0$. Tällöin lauseen 1.3.16 nojalla on olemassa sellainen $x_0 \in [x_1, x_2]$, että $g(x_0) = 0$ eli $f(x_0) = y$. □

Huomautus 1.3.18. (1) Bolzanon lause sanoo käytännössä sen, että jatkuva funktio saavuttaa ainakin kerran kaikki arvot miniminsä ja maksiminsa välillä.

(2) Bolzanon lauseessa ja lauseessa 1.3.16 on olennaista, että funktio f on jatkuva ja että reaaliakselissa "ei ole reikiä". Esimerkiksi funktio

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } x < 0, \\ 1, & \text{kun } x \ge 0, \end{cases}$$

on epäjatkuva eikä sillä ole nollakohtaa välillä $[-1,1]$ vaikka $f(-1) < 0 < f(1)$. Lisäksi, jos

$$g\colon \mathbb{Q} \cap [0,2] \to \mathbb{Q},\ g(x) = x^2 - 2,$$

niin $g(0) = -2$ ja $g(2) = 2$, mutta ei ole olemassa sellaista lukua $x_0 \in \mathbb{Q} \cap [0,2]$, että $g(x_0) = 0$.

1.4 Funktion tasainen jatkuvuus

Olkoot $A \subseteq \mathbb{R}$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ jatkuva joukossa A. Tällöin f on jatkuva jokaisessa pisteessä $t \in A$. Siten jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon, \quad \text{kun } |x - t| < \delta \text{ ja } x \in A.$$

Kuitenkin δ riippuu yleensä pisteestä t. Siis sama δ ei yleensä kelpaa kaikille pisteille $t \in A$. Yleensä δ riippuu luvusta ε, funktiosta f ja pisteestä t.

Esimerkki 1.4.1. Olkoon $f\colon\ ]0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos \frac{1}{x}$. Tällöin f on jatkuva joukossa $]0,1]$, erityisesti pisteessä $t \in\ ]0,1]$. Oletetaan, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{kaikille } x,\, t \in\ ]0,1],\ |x-t| < \delta,$$

ts. oletetaan ettei δ riipu pisteestä t. Valitaan sellainen n, että

$$\delta > \frac{1}{2n\pi}.$$

Olkoot

$$x = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{ja} \quad t = \frac{1}{(2n+1)\pi}.$$

Nyt $0 < t < x < \delta$, joten $|x - t| < \delta$, mutta

$$|f(x) - f(t)| = |\cos(2n\pi) - \cos((2n+1)\pi)| = 2.$$

Jos valitaan $0 < \varepsilon < 2$, niin ei ole olemassa sellaista lukua $\delta > 0$, jolle pätee $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ kaikille $x, t \in]0,1]$, $|x - t| < \delta$. Siis δ riippuu pisteestä t olennaisella tavalla.

Määritelmä 1.4.2. Funktiota $f\colon A \to \mathbb{R}$ sanotaan *tasaisesti jatkuvaksi* joukossa A, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } x,\, t \in A \text{ ja } |x - t| < \delta.$$

Määritelmän tarkoitus: Funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva joukossa A, jos funktion arvot ovat mielivaltaisen lähellä toisiaan aina, kun muuttujan arvot ovat riittävän lähellä toisiaan. Siis funktion arvot eivät saa muuttua "liian nopeasti"(tai jos ne muuttuvat "hyvin nopeasti", niin muutoksen on tapahduttava riittävän pienellä välillä).

Huomautus 1.4.3. (1) Tasainen jatkuvuus määritellään joukossa A, ei pisteittäin kuten jatkuvuus.

(2) Jos f on tasaisesti jatkuva joukossa A, niin f on jatkuva joukossa A (kiinnitetään $t = x_0$ määritelmässä 1.4.2). Käänteinen väite ei päde esimerkin 1.4.1 valossa.

Esimerkki 1.4.4. Osoitetaan, että funktio $f(x) = \frac{1}{x}$ on tasaisesti jatkuva välillä $[1,2]$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen ja $x,\, t \in [1,2]$. Tällöin

$$|f(x) - f(t)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right| = \left|\frac{t-x}{tx}\right| = \frac{|t-x|}{|t||x|} \le |t - x| < \varepsilon,$$

kun $t,\, x \in [1,2]$ (nyt $\frac{1}{|t|} \le 1$ ja $\frac{1}{|x|} \le 1$). Valitsemalla määritelmässä 1.4.2 $\delta = \varepsilon$ saadaan

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon \text{ kaikilla } x,\, t \in A,\ |x - t| < \delta.$$

Siis $f(x) = \frac{1}{x}$ on tasaisesti jatkuva välillä $[1,2]$.

Funktio $f(x) = \frac{1}{x}$ ei kuitenkaan ole tasaisesti jatkuva välillä $]0,1]$, kuten seuraava päättely osoittaa. Tehdään vastaoletus, että f on tasaisesti jatkuva välillä $]0,1]$. Tällöin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon, \quad \text{kun } t,\, x \in\ ]0,1] \text{ ja } |x - t| < \delta.$$

Valitaan tässä $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Valitaan lisäksi sellainen $n \in \mathbb{Z}_+$, että $\frac{1}{n} < \delta$. Asetetaan $x = \frac{1}{n}$ ja $t = \frac{1}{n+1}$. Tällöin $x,\, t \in\ ]0,1]$ sekä $0 < t < x < \delta$, joten $|x - t| < \delta$, mutta samalla

$$|f(x) - f(t)| = |n - (n+1)| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon,$$

eli saadaan ristiriita. Siten $f(x) = \frac{1}{x}$ ei ole tasaisesti jatkuva välillä $]0,1]$ (vaikka f on jatkuva kyseisellä välillä). (Huomaa, että tässä lauseketta $\frac{1}{|t||x|}$ ei voida arvioida ylöspäin.)

Lause 1.4.5. *Jatkuva funktio* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on tasaisesti jatkuva suljetulla ja rajoitetulla välillä* $[a,b]$.

Todistus. Tehdään vastaoletus: funktio f ei ole tasaisesti jatkuva välillä $[a,b]$. Tästä seuraa, että on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että jokaista $\delta > 0$ kohti on olemassa sellaiset pisteet $x,\ t \in [a,b]$ (jotka riippuvat luvusta δ), että

$$|x - t| < \delta \quad \text{ja} \quad |f(x) - f(t)| \geq \varepsilon.$$

Valitaan $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, jolloin jokaista n kohti on olemassa sellaiset $x_n,\ t_n \in [a,b]$, että

$$|x_n - t_n| < \frac{1}{n} \quad \text{ja} \quad |f(x_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon.$$

Jono (x_n) on rajoitettu, joten Bolzanon–Weierstrassin lauseen (lause B.3.8) nojalla sillä on suppeneva osajono (x_{n_k}). Olkoon $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Koska

$$a \leq x_{n_k} \leq b \quad \text{kaikilla } k = 1, 2, \ldots,$$

niin epäyhtälön säilymisperiaatteen nojalla

$$a \leq x_0 \leq b \quad \text{eli} \quad x_0 \in [a,b].$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} |t_{n_k} - x_0| &\leq |t_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| \\ &\leq \frac{1}{k} + |x_{n_k} - x_0| \to 0, \end{aligned}$$

kun $k \to \infty$ (huomaa, että $n_k \geq k$), joten $\lim\limits_{k\to\infty} t_{n_k} = x_0$. Koska f on jatkuva, niin jatkuvuuden jonokarakterisaation (lause 1.3.5) nojalla

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(t_{n_k}).$$

Täten on olemassa sellainen $k_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|f(x_{n_k}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad |f(t_{n_k}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } k \geq k_\varepsilon.$$

Siten

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |f(x_{n_k}) - f(t_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(t_{n_k})| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

kaikilla $k \geq k_\varepsilon$. Ristiriita. □

Esimerkki 1.4.6. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin x$. Osoitetaan, että f on tasaisesti jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

Ratkaisu: Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Kun $x, t \in \mathbb{R}$, on voimassa

$$\begin{aligned} |f(x) - f(t)| &= |x + \sin x - (t + \sin t)| \leq |x - t| + |\sin x - \sin t| \\ &= |x - t| + 2\left|\sin\frac{x-t}{2}\right|\left|\cos\frac{x+t}{2}\right|, \end{aligned}$$

sillä

$$\sin x - \sin t = 2\sin\frac{x-t}{2}\cos\frac{x+t}{2} \quad \text{kaikilla } x,\ t \in \mathbb{R}.$$

Edelleen, koska $|\cos y| \leq 1$ ja $|\sin y| \leq |y|$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$, saadaan arvio

$$|f(x) - f(t)| \leq |x - t| + 2 \cdot \frac{|x-t|}{2} \cdot 1 = 2|x - t| < \varepsilon,$$

kun $|x - t| < \frac{\varepsilon}{2}$. Voidaan siis valita $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Siten f on tasaisesti jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

Luku 2

Sarjat

2.1 Sarjan suppeneminen

Määritelmä 2.1.1. Olkoon (x_k) reaalilukujono. Muodostetaan uusi jono (s_n), jolle

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Jonoa (s_n) sanotaan jonoon (x_k) liittyväksi *osasummien jonoksi* tai *sarjaksi*. Jos jono (s_n) suppenee eli on olemassa sellainen $S \in \mathbb{R}$, että

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S,$$

niin sanotaan että *sarja suppenee*. Lukua S sanotaan *sarjan summaksi* ja merkitään

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \lim_{n\to\infty} s_n = S.$$

Jos sarja ei suppene, niin sanotaan, että se *hajaantuu*. Summaa

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = S - s_n$$

sanotaan sarjan (s_n) *(n:nneksi) jäännöstermiksi*.

Huomautus 2.1.2. (1) Sarjaa merkitään $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ riippumatta siitä, suppeneeko se.

(2) Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, niin sen osasummien jono (s_n) suppenee, ts. raja-arvo $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$ on olemassa. Tällöin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen n_ε, että

$$|s_n - S| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k\Big| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq n_\varepsilon.$$

Tästä nähdään, että sarja suppenee, jos ja vain jos sen jäännöstermien jono suppenee kohti lukua 0.

Esimerkki 2.1.3. (1) Osoitetaan, että $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$. Todistetaan ensin induktiolla, että

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

kaikilla $n = 1, 2, \ldots$: Väite pätee arvolla $n = 1$, sillä $s_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1}$. Jos sitten $s_k = 1 - \frac{1}{2^k}$ jollakin $k \in \mathbb{Z}_+$ (induktio-oletus), niin

$$s_{k+1} = s_k + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Induktio-periaatteen nojalla väite pätee kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Siten

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

(2) Sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ hajaantuu: Nyt $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $s_3 = -1$, $s_4 = 0, \ldots$ Induktiolla nähdään, että $s_n = 0$, kun n on parillinen, ja $s_n = -1$, kun n on pariton. Siten jono (s_n) hajaantuu.

(3) Osoitetaan, että sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ hajaantuu. Koska $\displaystyle\frac{k}{k+1} = \frac{1}{1+1/k} \geq \frac{1}{2}$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$, niin saadaan arvio

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1} \geq n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Siten jono (s_n) ei ole rajoitettu ja (s_n) hajaantuu lemman B.1.10 nojalla.

Lemma 2.1.4. *Jos sarja* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *suppenee, niin* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_k = 0$.

Todistus. Sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, joten on olemassa $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$. Koska $x_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, niin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S - S = 0.$$

Huomaa, että tässä myös raja-arvo $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_{n-1}$ on olemassa ja on S. □

Huomautus 2.1.5. (1) Ominaisuudesta $\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ *ei seuraa* sarjan $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppeneminen! Esimerkiksi harmoninen sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu vaikka $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

(2) Yleisesti sarjan suppeneminen riippuu siitä, että kuinka nopeasti x_k menee nollaan luvun k kasvaessa.

Seuraus 2.1.6. *Jos* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_k \neq 0$ *(tai raja-arvoa ei ole olemassa), niin* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *hajaantuu.*

Esimerkki 2.1.7. (1) Sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ hajaantuu, sillä

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0.$$

(2) Toisaalta sarjat $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)$ hajaantuvat, sillä raja-arvot

$$\lim_{k\to\infty}(-1)^k \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right).$$

eivät ole olemassa.

Lause 2.1.8 (Cauchyn kriteeri sarjoille)**.** *Sarja suppenee, jos ja vain jos sen osasummien jono* (s_n) *on Cauchyn jono eli jokaista* $\varepsilon > 0$ *kohti on olemassa sellainen* n_ε*, että*

$$|s_n - s_m| < \varepsilon, \qquad \textit{kun } n, m \geq n_\varepsilon.$$

Todistus. Seuraa suoraan Cauchyn kriteeristä jonoille. □

Huomautus 2.1.9. (1) Osasummien jono (s_n) on Cauchyn jono, jos ja vain jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|s_n - s_m| = \Big|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\Big| < \varepsilon, \qquad \text{kun } m > n \geq n_\varepsilon.$$

(2) Tämän kriteerin avulla on jo osoitettu kappaleessa B.4, että

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

suppenevat ja että

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

hajaantuu.

Joskus sarjan suppeneminen voidaan osoittaa laskemalla ns. teleskooppinen summa.

Esimerkki 2.1.10. Osoitetaan, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ suppenee. Koska

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

niin n:s osasumma voidaan esittää muodossa

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ Siten

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1,$$

joten sarja suppenee ja sen summa on 1.

Tarkastellaan seuraavaksi eräitä keskeisiä sarjoja. Todistetaan sitä ennen yksi tarpeellinen lemma.

Lemma 2.1.11. *Jos* $|a| < 1$, *niin* $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. *Jos* $a = 1$, *niin* $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$. *Muulloin jono* (a^n) *hajaantuu.*

Todistus. Olkoon ensin $|a| < 1$. Tällöin $|a^n| = |a|^n < 1^n = 1$, joten jonot $(|a|^n)$ ja (a^n) ovat rajoitettuja. Lisäksi jono $(|a|^n)$ on vähenevä, sillä $|a|^{n+1} = |a||a|^n < |a|^n$. Siten jono $(|a|^n)$ suppenee ja

$$\lim_{n\to\infty} |a|^n = \inf\{|a|^n \mid n = 1, 2, \ldots\}.$$

Merkitään tätä infimumia (ja raja-arvoa) m ja osoitetaan, että on $m = 0$. Selvästi 0 on alarajana alkioille $|a|^n$, ja infimumin määritelmän ehto (i) toteutuu.

Oletetaan, että $m > 0$. Koska $\frac{m}{|a|} > m = \inf\{|a|^n \mid n = 1, 2, \ldots\}$, niin on olemassa sellainen $n \in \mathbb{Z}_+$, että $|a|^n < \frac{m}{|a|}$. Tällöin

$$|a|^{n+1} < |a| \cdot \frac{m}{|a|} = m,$$

mikä on ristiriidassa luvun m määrittelyn kanssa. Näin ollen $m = 0$ ja harjoituksen 2 tehtävän 5c nojalla myös $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

Jos $|a| = 1$, niin $(a^n) = 1, 1, \ldots$ tai $(a^n) = -1, 1, -1, 1, \ldots$ eikä jono (a^n) suppene. Jos $|a| > 1$, niin $|a| = 1 + x$ jollakin $x > 0$. Tällöin

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = 1 + nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k > 1 + nx,$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, joten $|a|^n > nx$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Tässä $x > 0$, joten jono $(|a|^n)$ ei ole rajoitettu. Myöskään jonot $(|a^n|)$ ja (a^n) eivät siten voi olla rajoitettuja. □

Lause 2.1.12. *Geometrinen sarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

suppenee, jos ja vain jos $|x| < 1$. *Jos* $|x| < 1$, *niin sarjan summa on*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}.$$

Todistus. "$\Leftarrow$": Oletetaan, että $|x| < 1$ ja osoitetaan, että $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$. Nyt

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \qquad &&\text{ja} \\ xs_n &= \phantom{1 +{}} x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1}. && \end{aligned}$$

Vähentämällä nämä puolittain toisistaan saadaan $s_n - xs_n = 1 - x^{n+1}$, joten

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Huomaa, että nyt $1 - x \neq 0$. Koska $|x| < 1$, niin lemman 2.1.11 mukaan $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$, ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}, \qquad |x| < 1,$$

Siten sarja (s_n) suppenee.

"$\Rightarrow$": Oletetaan, että $|x| \geq 1$. Tällöin jono (x^k) ei suppene nollaan, kun $k \to \infty$, ja sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ hajaantuu seurauksen 2.1.6 nojalla. $\square$

Huomautus 2.1.13. Geometrinen sarja on lähtökohta monelle muulle suppenevalle sarjalle:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}, \qquad \text{kun } |x| < 1,$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \text{kun } |x| < 1,$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (3x)^k = \frac{1}{1-3x}, \qquad \text{kun } |x| < \frac{1}{3}.$

Seuraavan sarjan suppenemista koskeva tulos on tärkeässä roolissa myöhemmin suppenemistestien yhteydessä.

Lause 2.1.14. *Olkoon $p \in \mathbb{R}$. Sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

suppenee, jos ja vain jos $p > 1$.

Todistus. "$\Leftarrow$": **Tapa 1** (Hieman epätarkka, ennen kuin integraalit on käsitelty tarkasti): Olkoon $p > 1$. Osasummaa s_n voidaan arvioida ylöspäin määrätyn integraalin avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{1-p} \cdot \Big/_1^n x^{1-p} = 1 + \frac{1}{1-p}\left(n^{1-p} - 1\right) \\ &= 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) < 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} \qquad (p > 1). \end{aligned}$$

Siten jono (s_n) on kasvava $(s_{n+1} \geq s_n)$ ja rajoitettu, joten se suppenee monotonisen suppenemisen lauseen nojalla ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \lim_{n\to\infty} s_n \leq \frac{p}{p-1} < \infty, \text{ kun } p > 1.$$

Siis sarja suppenee, kun $p > 1$. (Tällä menetelmällä saadaan myös arvio virheen $|S - s_n|$ suuruudelle.)

Tapa 2 (Tarkka perustelu): Olkoon $p > 1$. Koska jono (s_n) on kasvava, niin monotonisen suppenemisen lauseen nojalla se suppenee, jos se on rajoitettu. Riittää siis osoittaa, että jono (s_n) on rajoitettu.

Kun $n \in \mathbb{Z}_+$, valitaan sellainen $t \in \mathbb{Z}_+$, että $n < 2^t$. Tällöin

$$\begin{aligned}
s_n \leq s_{2^t-1} &= \sum_{k=1}^{2^t-1} \frac{1}{k^p} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots \\
&\qquad + \left(\frac{1}{(2^{t-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^t-1)^p}\right) \\
&\leq 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \cdots + \frac{2^{t-1}}{(2^{t-1})^p} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \frac{1}{(2^{p-1})^3} + \cdots + \frac{1}{(2^{p-1})^{t-1}} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^k = \frac{1}{1-2^{1-p}} < \infty.
\end{aligned}$$

Tässä $\frac{1}{1-2^{1-p}}$ on vakio, joka ei riipu luvusta n, joten jono (s_n) on rajoitettu.

"$\Rightarrow$": Olkoon sitten $p \leq 1$. Tällöin kaikilla $k = 1, 2, \ldots$ pätee arvio $k^p \leq k$, josta saadaan $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^p}$. Siten osasummille saadaan arvio

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

Osasummien jono $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n = 1, 2, \ldots$, ei ole ylhäältä rajoitettu, Epäyhtälön (2.1) nojalla myöskään sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ osasummien jono ei ole ylhäältä rajoitettu, joten se hajaantuu.

Sen, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu, voi nähdä myös seuraavasti (tässä on sama epätarkkuus kuin tapauksen $p > 1$ yhteydessä):

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n+1).$$

Koska $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, niin myös $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, joten (s_n) hajaantuu.

Tapaus $p \leq 0$ voidaan perustella myös seuraavasti. Koska $-p \geq 0$, niin

$$\frac{1}{k^p} = k^{-p} \geq 1 \quad \text{kaikilla } k = 1, 2, \ldots$$

Siten jono $\left(\frac{1}{k^p}\right)$ ei suppene lukua 0 kohti, kun $k \to \infty$, ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ hajaantuu seurauksen 2.1.6 nojalla. □

Suppenevat sarjat toteuttavat yleisesti seuraavan *lineaarisuusominaisuuden.*

Lause 2.1.15. *Olkoot a, $b \in \mathbb{R}$. Jos $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = T$ ovat suppenevia sarjoja, niin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(ax_k + by_k)$ suppenee ja sen summa on $aS + bT$.*

Todistus. Koska $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = S$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k = T$, niin lukujonon raja-arvon laskusääntöjen (huomautus B.1.14) nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (ax_k + by_k) = a \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k + b \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k = aS + bT.$$

□

Huomautus 2.1.16. Sarjan $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k)$ suppenemisesta ei seuraa, että $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ tai $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenisi. Esimerkiksi

$$\sum_{k=1}^{\infty}((-1)^k + (-1)^{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$$

suppenee, mutta $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ ja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}$ hajaantuvat.

2.2 Suppenemistestejä positiivitermisille sarjoille

Jonojen tapauksessa osoitettiin, että reaalilukujono suppenee, jos ja vain jos se on Cauchyn jono. Tällöin sen suppeneminen pääteltiin raja-arvoa laskematta. Vastaavasti sarjojen tapauksessa on tärkeää pystyä päättelemään sarjan suppeneminen laskematta sen summaa – summan laskeminen on usein hyvin vaikeaa, jopa mahdotonta ja myös turhaa, jos sarja osoittautuukin hajaantuvan. Sarjan suppenemisen tarkastelu summaa laskematta on usein mahdollista niin sanottujen suppenemistestien avulla.

Määritelmä 2.2.1. Sarjaa $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ sanotaan *positiivitermiseksi*, jos $x_k \geq 0$ aina, kun $k = 1, 2, \ldots$

Seuraava lause antaa monotonisen suppenemisen lausetta vastaavan tuloksen sarjoille.

Lause 2.2.2. *Positiiviterminen sarja suppenee, jos ja vain jos sen osasummien jono* (s_n) *on ylhäältä rajoitettu. Tällöin*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \sup\{s_n \mid n = 1, 2, \ldots\}.$$

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee ja $x_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Tällöin osasummien jono (s_n) suppenee, joten jono (s_n) on rajoitettu.

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että (s_n) on ylhäältä rajoitettu. Jono s_n on lisäksi kasvava, sillä

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k = x_{n+1} \geq 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Siis (s_n) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, joten monotonisen suppenemisen lauseen (lause B.2.3) nojalla (s_n) suppenee. Siten sarja suppenee.

Lisäksi monotonisen suppenemisen lauseen nojalla

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sup\{s_n \mid n = 1, 2, \ldots\}.$$

□

Huomautus 2.2.3. Lause ei päde, jos termit vaihtavat merkkiä. Esimerkiksi

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$$

hajaantuu, vaikka sen osasummien jono on rajoitettu.

Seuraava lause on yksinkertainen, mutta äärimmäisen tärkeä.

Lause 2.2.4 (majorantti- ja minoranttiperiaate)**.** *Oletetaan, että jonoille* (x_k) *ja* (y_k) *on voimassa* $0 \leq x_k \leq y_k$ *kaikilla* $k = 1, 2, \dots$

(i) Jos $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ *suppenee, niin* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *suppenee. (majoranttiperiaate)*

(ii) Jos $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *hajaantuu, niin* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ *hajaantuu. (minoranttiperiaate)*

Todistus. Osoitetaan ensin kohta (i). Merkitään $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ ja $s'_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$, $n = 1, 2, \dots$ Koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee, niin jono (s'_n) suppenee ja se on rajoitettu. Täten on olemassa sellainen $M \in \mathbb{R}$, että $|s'_n| \leq M$ kaikilla $n = 1, 2, \dots$ Edelleen $0 \leq s'_n \leq M$ kaikilla $n = 1, 2, \dots$, sillä $y_k \geq 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$. Koska kaikilla k pätee $0 \leq x_k \leq y_k$, niin

$$0 \leq s_n \leq s'_n \leq M, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ on positiiviterminen ja sen osasummien jono (s_n) on rajoitettu. Lauseen 2.2.2 nojalla jono (s_n) ja siten myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

Kohta (ii) seuraa vastaoletuksella kohdasta (i). □

Huomautus 2.2.5. (1) Yleensä tehtävänä on tutkia, suppeneeko annettu sarja. Tällöin on pääteltävä, kumpaa periaatetta tehtävässä kannattaa käyttää; hajaantuva majoranttisarja tai suppeneva minoranttisarja ei auta tehtävän ratkaisussa.

(2) Edellä sarjan on oltava positiiviterminen. Esimerkiksi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}\right)$$

hajaantuu, vaikka $-\frac{1}{k} \leq 0$ kaikilla $k = 1, 2, \dots$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$ suppenee.

Esimerkki 2.2.6. Tutki, suppeneeko sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6k}{k^4+3}$.

Ratkaisu: Aluksi voidaan tehdä epämuodollinen päättely sarjan suppenemisesta. Sarjan suppeneminen riippuu sen "häntäosan" käyttäytymisestä. Indeksin k suurilla arvoilla voidaan arvioida

$$\frac{6k}{k^4+3} \approx \frac{6k}{k^4} = \frac{6}{k^3}$$

ja lauseen 2.1.14 nojalla $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ suppenee. Tällaisen likimääräisen tarkastelun voi tehdä tehtävän alussa, mutta se antaa vain "vihjeitä" sarjan käyttäytymisestä.

Osoitetaan, että sarja suppenee ja käytetään majoranttiperiaatetta. Nyt

$$0 \leq \frac{6k}{k^4+3} \leq \frac{6k}{k^4} = \frac{6}{k^3}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Lisäksi lauseen 2.1.14 nojalla
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^3} = 6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$
suppenee, joten alkuperäinen sarja suppenee majoranttiperiaatteen nojalla.

Esimerkki 2.2.7. Tutki, millä arvoilla $x \geq 0$ sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$
suppenee.

Ratkaisu: Olkoon $0 \leq x < 1$. Tällöin
$$0 \leq \frac{x^k}{k} \leq x^k, \qquad k = 1, 2, \dots$$
Tässä $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ on geometrinen sarja, joka suppenee, kun $0 \leq x < 1$. Siten majoranttiperiaatteen nojalla sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ suppenee, kun $0 \leq x < 1$.

Olkoon sitten $x \geq 1$. Tällöin
$$0 < \frac{1}{k} \leq \frac{x^k}{k}, \qquad k = 1, 2, \dots$$
Tässä $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ on harmoninen sarja, joka hajaantuu. Siten minoranttiperiaatteen nojalla $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ hajaantuu, kun $x \geq 1$.

Esimerkki 2.2.8. Tutki, suppeneeko sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$.

Ratkaisu: Osoitetaan, että sarja hajaantuu ja käytetään minoranttiperiaatetta. Koska $\sqrt{k+1} \leq \sqrt{k+k} = \sqrt{2}\sqrt{k}$, niin
$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{k}} > 0.$$
Lauseen 2.1.14 nojalla $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ hajaantuu, joten myös $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ hajaantuu ja minoranttiperiaatteen nojalla $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ hajaantuu.

Esimerkki 2.2.9. Tutki, suppeneeko sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+5}{k^3+k^2+k+1}$.

Ratkaisu: Hankitaan ensin arvaus suppenemisesta. Suurilla indeksin k arvoilla $\displaystyle\frac{k+5}{k^3+k^2+k+1} \approx \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$. Koska sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenee, yritetään osoittaa myös annettu sarja suppenevaksi.

Käytetään majoranttiperiaatetta. Nyt
$$0 \leq \frac{k+5}{k^3+k^2+k+1} = \frac{1+5/k}{k^2(1+1/k+1/k^2+1/k^3)} \leq \frac{6}{k^2}$$

kaikilla $k = 1, 2, \ldots$, ja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{6}{k^2} = 6 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ suppenee. Siten alkuperäinen sarja suppenee majoranttiperiaatteen nojalla.

Esimerkki 2.2.10. Tutki, suppeneeko sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{k+5}{k^2+k+1}}$.

Ratkaisu: Hankitaan ensin arvaus suppenemisesta. Suurilla indeksin k arvoilla $\sqrt{\frac{k+5}{k^2+k+1}} \approx \sqrt{\frac{k}{k^2}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$. Koska sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ hajaantuu, yritetään osoittaa myös annettu sarja hajaantuvaksi.

Käytetään minoranttiperiaatetta. Alaspäin arvioimalla saadaan

$$\frac{k+5}{k^2+k+1} = \frac{1+5/k}{k(1+1/k+1/k^2)} \geq \frac{1}{4k} \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Lisäksi sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{4k}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

hajaantuu, joten minoranttiperiaatteen nojalla annettu sarja hajaantuu.

Huomautus 2.2.11. Majorantti- ja minoranttiperiaatteessa sarjaa kannattaa yrittää verrata sarjaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

tai geometriseen sarjaan, joiden suppeneminen hallitaan täysin.

Lause 2.2.12 (suhdetesti)**.** *Oletetaan, että $x_k > 0$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$*

(i) Jos on olemassa sellaiset $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ ja $0 \leq M < 1$, että

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \leq M \quad \textit{kaikilla } k \geq k_0,$$

niin $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

(ii) Jos on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \geq 1 \quad \textit{kaikilla } k \geq k_0,$$

niin $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ hajaantuu.

Todistus. (i) Oletusten nojalla

$$\begin{aligned}
x_{k_0+1} &\leq M x_{k_0}, \\
x_{k_0+2} &\leq M x_{k_0+1} \leq M^2 x_{k_0}, \\
&\vdots \\
x_{k_0+(k-k_0)} &\leq M x_{k-1} \leq M^2 x_{k-2} \leq \cdots \leq M^{k-k_0} x_{k_0},
\end{aligned}$$

joten

$$x_k \le x_{k_0} M^{k-k_0} \quad \text{kaikilla } k \ge k_0$$

(tarkka perustelu induktiolla). Lisäksi

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} x_{k_0} M^{k-k_0} = x_{k_0} M^{-k_0} \sum_{k=k_0}^{\infty} M^k,$$

missä $\sum_{k=k_0}^{\infty} M^k$ on suppeneva geometrinen sarja, sillä $0 \le M < 1$. Siten alkuperäinen sarja suppenee majoranttiperiaatteen nojalla.

(ii) Oletusten mukaan

$$x_k \ge x_{k_0} > 0 \quad \text{kaikilla } k \ge k_0.$$

Tästä seuraa, että jono (x_k) ei suppene lukua 0 kohti. Siten $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ hajaantuu seurauksen 2.1.6 nojalla.

□

Seuraus 2.2.13. *Oletetaan, että $x_k > 0$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$*

(i) Jos $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} < 1$, niin sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

(ii) Jos $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} > 1$, niin sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ hajaantuu.

Todistus. (i) Olkoon $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = c$, missä $0 \le c < 1$. Tällöin on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} - c \right| < \frac{1-c}{2} \quad \text{kaikilla } k \ge k_0.$$

Tästä seuraa, että

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} < \frac{1-c}{2} + c = \frac{c+1}{2} < 1 \quad \text{kaikilla } k \ge k_0,$$

joten sarja suppenee lauseen 2.2.12 nojalla.

(ii) Olkoon $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = c$, missä $c > 1$. Tällöin on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} - c \right| < \frac{c-1}{2} \quad \text{kaikilla } k \ge k_0.$$

Tästä seuraa, että

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} > c - \frac{c-1}{2} = \frac{c+1}{2} > 1 \quad \text{kaikilla } k \ge k_0,$$

joten sarja hajaantuu lauseen 2.2.12 nojalla.

□

Huomautus 2.2.14. Jos $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_{k+1}}{x_k} = 1$, niin sarja voi supeta tai hajaantua. Esimerkiksi sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

suppenee, kun $p > 1$, ja hajaantuu, kun $0 < p \leq 1$. Tässä tapauksessa

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1/(k+1)^p}{1/k^p} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^p = 1$$

kaikilla $0 < p < \infty$. Huomaa, että tässä $\frac{x_{k+1}}{x_k} < 1$ kaikilla $k = 1, 2, \dots$

Esimerkki 2.2.15. Tutki, suppeneeko sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

Ratkaisu: Merkitään $x_k = \dfrac{k^2}{2^k}$. Tällöin

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{(k+1)^2/2^{k+1}}{k^2/2^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \frac{2^k}{2^{k+1}} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}, \text{ kun } k \to \infty,$$

joten sarja suppenee seurauksen 2.2.13 nojalla.

Esimerkki 2.2.16. Tutki, suppeneeko sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$.

Ratkaisu: Merkitään $x_k = \dfrac{(k!)^2}{(2k)!}$. Tällöin

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{((k+1)!)^2(2k)!}{(2k+2)!(k!)^2} = \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} \to \frac{1}{4}, \text{ kun } k \to \infty,$$

joten sarja suppenee seurauksen 2.2.13 nojalla.

Lause 2.2.17 (juuritesti)**.** *Oletetaan, että $x_k \geq 0$ kaikilla $k = 1, 2, \dots$*

(i) Jos on olemassa sellaiset $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ ja $0 \leq M < 1$, että

$$\sqrt[k]{x_k} \leq M \quad \textit{kaikilla } k \geq k_0,$$

niin $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

(ii) Jos on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\sqrt[k]{x_k} \geq 1 \quad \textit{kaikilla } k \geq k_0,$$

niin $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ hajaantuu.

Todistus. (i) Oletusten nojalla on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\begin{aligned}\sqrt[k]{x_k} &\le M \quad \text{kaikilla } k \ge k_0, \text{ joten}\\ x_k &\le M^k \quad \text{kaikilla } k \ge k_0.\end{aligned}$$

Tässä $\sum_{k=k_0}^{\infty} M^k$ on geometrinen sarja, joka suppenee, sillä $0 \le M < 1$, joten alkuperäinen sarja suppenee majoranttiperiaatteen nojalla.

(ii) Oletusten nojalla on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\begin{aligned}\sqrt[k]{x_k} &\ge 1 \quad \text{kaikilla } k \ge k_0, \text{ joten}\\ x_k \ge 1^k &= 1 \quad \text{kaikilla } k \ge k_0.\end{aligned}$$

Täten jono (x_k) ei suppene lukua 0 kohti, joten sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ hajaantuu seurauksen 2.1.6 nojalla.

$\square$

Seuraus 2.2.18. *Oletetaan, että $x_k > 0$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$*

(i) Jos $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{x_k} < 1$, niin sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

(ii) Jos $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{x_k} > 1$, niin sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ hajaantuu.

Todistus. Vastaavasti kuin seurauksen 2.2.13 todistus (harjoitustehtävä). $\square$

Huomautus 2.2.19. (1) Juuritestiä käyttäessä kannattaa muistaa raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Todistus. Huomaa, että $\sqrt[n]{n} \ge 1$, kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ Johdetaan seuraavaksi luvulle $\sqrt[n]{n}$ yläraja, jonka raja-arvo on 1. Kun $n \ge 2$, niin binomikaavasta $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ saadaan arvio

$$\begin{aligned}\Big(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\Big)^n &= 1 + \binom{n}{1}\sqrt{\frac{2}{n}} + \binom{n}{2}\Big(\sqrt{\frac{2}{n}}\Big)^2 + \cdots + \Big(\sqrt{\frac{2}{n}}\Big)^n\\ &\ge 1 + \binom{n}{2}\Big(\sqrt{\frac{2}{n}}\Big)^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{2}{n} = n.\end{aligned}$$

Siis $\big(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\big)^n \ge n$, mistä saadaan $1 + \sqrt{\frac{2}{n}} \ge \sqrt[n]{n} \ge 1$. Siten suppiloperiaatteen mukaan $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. $\square$

(2) Jos $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{x_k} = 1$, niin sarja voi supeta tai hajaantua. Esimerkiksi sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p},$$

suppenee, kun $p > 1$, ja hajaantuu, kun $0 < p \le 1$. Tässä tapauksessa kohdan (1) mukaan

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^p}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[k]{k})^p} = 1$$

kaikilla $0 < p < \infty$.

(3) Sarjan suppenemista tarkasteltaessa voidaan aina jättää pois äärellisen monta termiä sarjan alusta. Ne eivät vaikuta sarjan suppenemiseen, mutta vaikuttavat kyllä sarjan summaan. Tällä tulkinnalla positiivitermisten sarjojen suppenemistestejä voidaan soveltaa myös sarjoihin, joiden termit ovat positiivisia jostakin indeksin arvosta lähtien.

Esimerkki 2.2.20. (1) Tutki, suppeneeko sarja $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^k}$.

Ratkaisu: Merkitään $x_k = \dfrac{1}{(\log k)^k}$, kun $k = 2, 3, \ldots$ Tällöin

$$\sqrt[k]{x_k} = \sqrt[k]{\frac{1}{(\log k)^k}} = \frac{1}{\log k} \to 0, \text{ kun } k \to \infty,$$

joten sarja suppenee seurauksen 2.2.18 nojalla.

(2) Tutki, suppeneeko sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{2k+3}{4k+5}\Big)^k$.

Ratkaisu: Merkitään $x_k = \Big(\dfrac{2k+3}{4k+5}\Big)^k$. Tällöin

$$\sqrt[k]{x_k} = \sqrt[k]{\Big(\frac{2k+3}{4k+5}\Big)^k} = \frac{2k+3}{4k+5} = \frac{2+3/k}{4+5/k} \to \frac{1}{2}, \text{ kun } k \to \infty,$$

joten sarja suppenee seurauksen 2.2.18 nojalla.

(3) Millä arvoilla $x \geq 0$ sarja $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$ suppenee?

Ratkaisu:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{kx^k} = \lim_{k\to\infty} x\sqrt[k]{k} = x.$$

Seurauksen 2.2.18 nojalla sarja suppenee, kun $0 \leq x < 1$, ja hajaantuu, kun $x > 1$. Kun $x = 1$, niin jono (k) ei suppene lukua 0 kohti ja sarja hajaantuu seurauksen 2.1.6 nojalla.

Lause 2.2.21 (vertailuperiaate)**.** *Oletetaan, että $x_k > 0$ ja $y_k > 0$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$ ja että*

$$K = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k}$$

on olemassa.

(i) Jos $0 < K < \infty$, niin $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, jos ja vain jos $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee.

(ii) Jos $K = 0$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee, niin $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

(iii) Jos $K = \infty$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ hajaantuu, niin $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ hajaantuu.

Todistus. (i) Oletetaan, että $0 < K < \infty$. Tällöin on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\Big|\frac{x_k}{y_k} - K\Big| < \frac{K}{2} \quad \text{kaikilla } k \geq k_0,$$

josta saadaan epäyhtälö

$$\frac{1}{2}Ky_k < x_k < \frac{3}{2}Ky_k \quad \text{kaikilla } k \geq k_0.$$

Jos $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee, niin myös $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{3}{2}Ky_k$ suppenee. Majoranttiperiaatteen nojalla $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ suppenee ja siten myös $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

Jos $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, niin myös $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ suppenee. Majoranttiperiaatteen nojalla $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{2}Ky_k$ suppenee ja siten myös $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee.

(ii) Oletetaan, että $K = 0$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee. Jono $\left(\frac{x_k}{y_k}\right)$ on suppenevana jonona rajoitettu, joten on olemassa sellainen $M > 0$, että

$$\left|\frac{x_k}{y_k}\right| \leq M \quad \text{kaikilla } k = 1, 2, \ldots$$

Siten

$$0 < x_k \leq My_k \quad \text{kaikilla } k = 1, 2, \ldots$$

Nyt $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee, joten $\sum_{k=1}^{\infty} My_k$ suppenee ja majoranttiperiaatteen nojalla myös $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

(iii) Oletetaan, että $K = \infty$ ja että $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ hajaantuu. Tällöin on olemassa sellainen $k_1 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\frac{x_k}{y_k} \geq 1 \quad \text{kaikilla } k \geq k_1.$$

Siten

$$x_k \geq y_k \quad \text{kaikilla } k \geq k_1.$$

Koska $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ hajaantuu, niin minoranttiperiaatteen nojalla myös $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ hajaantuu.

□

Huomautus 2.2.22. Edellinen lause sanoo myös sen, että $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ hajaantuu, jos ja vain jos $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ hajaantuu. Tämän saa todistettua suoraankin käyttämällä minoranttiperiaatetta.

Jos $K = 0$ lauseessa 2.2.21, niin sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenemisesta ei välttämättä seuraa sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppeneminen. Jos esimerkiksi $x_k = \dfrac{1}{k^2}$ ja $y_k = \dfrac{1}{k}$, niin

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

ja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, mutta $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ hajaantuu.

Esimerkki 2.2.23. Tutki, suppeneeko sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-2k+7}{k^5+5k^4-3k^2+2k-1}$.

Ratkaisu: Suurilla indeksin k arvoilla pätee

$$\frac{k^2-2k+7}{k^5+5k^4-3k^2+2k-1} \approx \frac{k^2}{k^5} = \frac{1}{k^3}.$$

Koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ suppenee, yritetään osoittaa alkuperäinen sarja suppenevaksi.

Valitaan $x_k = \frac{k^2-2k+7}{k^5+5k^4-3k^2+2k-1}$ ja $y_k = \frac{1}{k^3}$ lauseessa 2.2.21 (nyt $x_k > 0$ ja $y_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$). Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{x_k}{y_k} &= \frac{k^2-2k+7}{k^5+5k^4-3k^2+2k-1} \cdot k^3 \\ &= \frac{k^5-2k^4+7k^3}{k^5+5k^4-3k^2+2k-1} \\ &= \frac{k^5\left(1-\frac{2}{k}+\frac{7}{k^2}\right)}{k^5\left(1+\frac{5}{k}-\frac{3}{k^3}+\frac{2}{k^4}-\frac{1}{k^5}\right)} \to 1, \quad \text{kun } k \to \infty.\end{aligned}$$

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ suppenee, joten lauseen 2.2.21 nojalla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

2.3 Itseisesti suppenevat sarjat

Määritelmä 2.3.1. Sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ sanotaan *suppenevan itseisesti*, jos $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ suppenee. Jos sarja suppenee, mutta ei suppene itseisesti, niin sanotaan, että se *suppenee ehdollisesti*.

Esimerkki 2.3.2. Alternoiva harmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ suppenee ehdollisesti, sillä

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

hajaantuu, mutta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

suppenee. Tämä osoitettiin jo esimerkissä B.4.10, mutta sen näkee myös seuraavalla tavalla: Koska

$$s_{2n} = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

ja

$$s_{2n-1} = \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right),$$

niin

$$\frac{1}{2} \leq s_{2n} = s_{2n-1} - \frac{1}{2n} < s_{2n-1} \leq 1.$$

Jono (s_{2n}) on kasvava ja rajoitettu ja jono (s_{2n-1}) on vähenevä ja rajoitettu, joten monotonisen suppenemisen lauseen nojalla ne suppenevat eli raja-arvot

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$$

ovat olemassa. Yllä olevan nojalla $s_{2n} - s_{2n-1} = -\frac{1}{2n}$, joten

$$\lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right) = 0.$$

Täten jonot (s_{2n}) ja (s_{2n-1}) suppenevat kohti samaa lukua $S \in \mathbb{R}$. Harjoituksen 4 tehtävän 1 nojalla myös $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$.

Esimerkki 2.3.3. Tutki sarjan $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^3} = \sin 1 + \frac{1}{8}\sin 2 + \frac{1}{27}\sin 3 + \ldots$ itseistä suppenemista.

Ratkaisu: Koska

$$0 \leq \left|\frac{\sin k}{k^3}\right| \leq \frac{1}{k^3} \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} \text{ suppenee,}$$

niin

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\sin k}{k^3}\right|$$

suppenee majoranttiperiaatteen nojalla. Siis sarja suppenee itseisesti.

Itse sarjan $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k^3}$ suppenemisen tutkiminen on kuitenkin ongelmallista, sillä sen termit vaihtavat merkkiä! Tähän tarvitaan seuraavaa lausetta.

Lause 2.3.4. *Itseisesti suppeneva sarja suppenee ja*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\,.$$

Todistus. Olkoon $y_k = x_k + |x_k|$, $k = 1, 2, \ldots$ Koska $-|x_k| \leq x_k \leq |x_k|$, niin

$$0 \leq y_k \leq 2\,|x_k|\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Koska $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$ suppenee, niin majoranttiperiaatteen nojalla $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee. Edelleen

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(y_k - |x_k|) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} y_k - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|x_k|,$$

joten $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee. Lisäksi kolmioepäyhtälön nojalla

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|x_k| = \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|.$$

□

Huomautus 2.3.5. (1) Edellinen lause antaa keinon tutkia sellaisten sarjojen suppenemista, joiden termit vaihtavat merkkiään. Ottamalla itseisarvot saadaan positiiviterminen sarja, jonka suppenemista voidaan tutkia edellä olleiden suppenemistestien avulla. Huomaa kuitenkin, että itseisarvojen muodostaman sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ hajaantuminen ei kerro mitään sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenemisesta (hajaantumisesta).

(2) Yleensä

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\Big| \neq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.$$

Esimerkiksi jos $(x_k) = -1, 1, 0, 0, \ldots$, niin

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0, \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = 2.$$

Määritelmä 2.3.6. Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ sarja. Jos $\varphi \colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ on bijektio ja $y_k = x_{\varphi(k)}$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$, niin sarjaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

sanotaan alkuperäisen sarjan *uudelleenjärjestelyksi.*

Esimerkki 2.3.7. Olkoon

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

ja kuvaus $\varphi \colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ bijektio

$$\varphi(k) = \begin{cases} k+1, & \text{kun } k \text{ on pariton,} \\ k-1, & \text{kun } k \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

Tällöin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \cdots,$$

on harmonisen sarjan uudelleenjärjestely.

Lause 2.3.8. *Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee itseisesti, niin jokainen uudelleenjärjestely $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee ja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Todistus. Lauseen 2.3.4 nojalla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee. Merkitään $S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Silloin on olemassa sellainen N, että

$$|s_n - S| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } n \geq N$$

ja
$$\Big|\sum_{k=1}^{N}|x_k| - \sum_{k=1}^{N+p}|x_k|\Big| = \sum_{k=N+1}^{N+p}|x_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } p \in \mathbb{Z}_+.$$

Jälkimmäinen väite saadaan Cauchyn kriteeristä (lause B.4.6), sillä sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|$ osasummien jono on Cauchyn jono. Merkitään
$$t_n = \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{n} y_k.$$

Valitaan M niin, että termit $x_1, \ldots, x_N$ esiintyvät osasummassa t_M. Jos $m \geq M$, niin $t_m - s_N$ on äärellinen summa termeistä x_k, $k > N$. Tällöin yllä olevan nojalla on olemassa sellainen $p \in \mathbb{Z}_+$, että
$$|t_m - s_N| \leq \sum_{k=N+1}^{N+p}|x_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Siten
$$|t_m - S| \leq |t_m - s_N| + |s_N - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{kun } m \geq M,$$

joten $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \lim_{m\to\infty} t_m = S.$ □

Huomautus 2.3.9. (1) Erityisesti suppenevat positiivitermiset sarjat voidaan järjestellä uudelleen ilman, että summa muuttuu.

(2) Ellei sarja suppene itseisesti, niin uudelleenjärjestely voi vaikuttaa suppenemiseen ja summaan. Olkoon
$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Aikaisemmin todistettiin, että $\frac{1}{2} \leq S \leq 1$. Järjestelemällä sarja uudelleen saadaan
$$\begin{aligned}
&\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{4} + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\Big) - \frac{1}{8} + \Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\Big) - \frac{1}{12} + \cdots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\Big) \\
&= \frac{1}{2}S.
\end{aligned}$$

Lause 2.3.10. *Jos sarjan jokainen uudelleenjärjestely suppenee, niin sarja suppenee itseisesti.*

Todistus. Tehdään vastaoletus: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|$ hajaantuu. Olkoot $x_1^+, x_2^+, \ldots$ sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ ei-negatiivisten termien jono ($x_i^+ \geq 0$) ja $x_1^-, x_2^-, \ldots$ negatiivisten termien jono ($x_i^- < 0$). Koska sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee ehdollisesti, niin sekä $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^+$ että $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^-$ hajaantuvat (harjoitustehtävä). Siten erityisesti $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^+$ hajaantuu eli
$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^+ = \infty \qquad (x_k^+ \geq 0).$$

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^+$ hajaantuu, mutta se ei ole sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ uudelleenjärjestely (termit x_k^- puuttuvat) eikä siten vielä anna ristiriitaa. Korjataan tilanne asettamalla termit x_k^- riittävän harvasti termien x_k^+ väleihin.

Termin x_1^- asettamiseksi valitaan sellainen luku $k_1 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$x_1^+ + x_2^+ + \cdots + x_{k_1}^+ \geq |x_1^-| + 1 = -x_1^- + 1,$$

jolloin $x_1^+ + \cdots + x_{k_1}^+ + x_1^- \geq 1$.

Seuraavaksi termin x_2^- asettamiseksi valitaan sellainen $k_2 > k_1$, että

$$x_1^+ + \cdots + x_{k_1}^+ + x_1^- + x_{k_1+1}^+ + \cdots + x_{k_2}^+ \geq |x_2^-| + 2,$$

jolloin $x_1^+ + \cdots + x_{k_1}^+ + x_1^- + x_{k_1+1}^+ + \cdots + x_{k_2}^+ + x_2^- \geq 2$.

Jatketaan näin sijoittamalla x_n^- termin $x_{k_n}^+$ jälkeen siten, että osasumma termiin x_n^- asti on suurempi tai yhtäsuuri kuin n. Näin saadaan haluttu hajaantuva sarja, joka on alkuperäisen sarjan uudelleenjärjestely. □

Huomautus 2.3.11. Siis itseisesti suppenevat sarjat ovat sellaisia sarjoja, joiden kaikki uudelleenjärjestelyt suppenevat. Tämän takia itseisesti suppenevat sarjat ovat tärkeitä.

Lause 2.3.12 (Riemannin uudelleenjärjestelylause)**.** *Jos sarja suppenee ehdollisesti, niin se saadaan suppenemaan kohti mitä tahansa lukua järjestelemällä sen termit uudelleen.*

Todistus. Oletetaan, että $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee ehdollisesti. Olkoot $x_1^+, x_2^+, \ldots$ sarjan ei-negatiivisten termien jono ja $x_1^-, x_2^-, \ldots$ negatiivisten termien jono. Koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee ehdollisesti, niin täytyy olla voimassa

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^+ = \infty \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k^- = -\infty \qquad \text{(harjoitustehtävä).}$$

Jos molemmat olisivat äärellisiä, niin sarja suppenisi itseisesti ja jos vain toinen olisi äärellinen, niin sarja itse hajaantuisi. Lisäksi sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenemisesta seuraa, että $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$. Siten myös $\lim_{k\to\infty} x_k^+ = 0$ ja $\lim_{k\to\infty} x_k^- = 0$.

Olkoon $S \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että sarjan summaksi saadaan S järjestelemällä se uudelleen.

Olkoon k_1 pienin luku, jolle

$$x_1^+ + x_2^+ + \cdots + x_{k_1}^+ > S.$$

Olkoon seuraavaksi k_2 pienin luku, jolle

$$(x_1^+ + \cdots + x_{k_1}^+) + (x_1^- + \cdots + x_{k_2}^-) < S.$$

Edelleen olkoon $k_3 > k_1$ pienin luku, jolle

$$(x_1^+ + \cdots + x_{k_1}^+) + (x_1^- + \cdots + x_{k_2}^-) + (x_{k_1+1}^+ + \cdots + x_{k_3}^+) > S.$$

Näin jatkamalla saadaan sarja, jonka osasummat heilahtelevat luvun S molemmilla puolilla. Tätä prosessia voidaan jatkaa, sillä

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^+ = \infty \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k^- = -\infty.$$

Näin saatu sarja on alkuperäisen uudelleenjärjestely. Koska

$$\lim_{k\to\infty} x_k^+ = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty} x_k^- = 0,$$

niin saadun sarjan summa on S. □

Esimerkki 2.3.13. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ saadaan suppenemaan kohti mitä tahansa lukua S järjestelemällä sen termit uudelleen.

Olkoon esimerkiksi $S = 2009$. Menetellään kuten lauseen 2.3.12 todistuksessa:

1. Valitaan pienin luku k_1, jolle

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k_1 - 1} > 2009.$$

2. Seuraavaksi valitaan pienin luku k_2, jolle

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k_1 - 1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2k_2} < 2009.$$

3. Sitten valitaan pienin luku $k_3 > k_1$ siten ,että

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k_1 - 1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2k_2} + \frac{1}{2k_1 + 1} + \cdots + \frac{1}{2k_3 - 1} > 2009.$$

Jatkamalla tähän tapaan saadaan sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ uudelleenjärjestely, joka suppenee ja jonka summa on 2009.

2.4 Vuorottelevat sarjat

Määritelmä 2.4.1. Sarjaa sanotaan *vuorottelevaksi*, jos se on muotoa

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x_k = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots,$$

missä $x_k \geq 0$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$

Huomautus 2.4.2. Koska

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x_k,$$

niin riittää tarkastella vain toista.

Seuraavaksi esitetään ja todistetaan tärkeä vuorottelevien sarjojen suppenemista koskeva tulos.

Lause 2.4.3 (Leibnizin lause)**.** *Oletetaan, että* (x_k) *on vähenevä jono,* $x_k \geq 0$ *kaikilla* $k = 1, 2, \ldots$ *ja* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$*. Silloin sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x_k$$

suppenee. Jos S *on ylläolevan sarjan summa ja* s_n *sen* n*:s osasumma, niin seuraava* virhearvio *pätee:*

$$|S - s_n| = \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} x_k \Big| \leq x_{n+1} \quad \textit{kaikilla } n = 1, 2, \ldots$$

Todistus. Jonon (s_{2n-1}) peräkkäisille alkioille pätee

$$\begin{aligned} s_{2(n+1)-1} - s_{2n-1} = s_{2n+1} - s_{2n-1} &= (-1)^{2n+2} x_{2n+1} + (-1)^{2n+1} x_{2n} \\ &= x_{2n+1} - x_{2n} \leq 0, \end{aligned}$$

sillä jono (x_n) on vähenevä. Siten myös jono (s_{2n-1}) on vähenevä. Vastaavasti jonon (s_{2n}) alkioille on voimassa

$$\begin{aligned} s_{2(n+1)} - s_{2n} = s_{2n+2} - s_{2n} &= (-1)^{2n+3} x_{2n+2} + (-1)^{2n+2} x_{2n+1} \\ &= x_{2n+1} - x_{2n+2} \geq 0, \end{aligned}$$

sillä jono (x_n) on vähenevä. Täten jono (s_{2n}) on kasvava.

Toisaalta kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ on voimassa

$$s_{2n} = s_{2n-1} + (-1)^{2n+1} x_{2n} = s_{2n-1} - x_{2n} \leq s_{2n-1},$$

sillä $x_{2n} \geq 0$. Tästä saadaan (kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$) arviot

$$s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_{2n-3} \leq \cdots \leq s_1.$$

Siis s_1 on kasvavan jonon (s_{2n}) yläraja ja s_2 on vähenevän jonon (s_{2n-1}) alaraja. Monotonisen suppenemisen lauseen nojalla jonot (s_{2n}) ja (s_{2n-1}) suppenevat. Merkitään

$$S_1 = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} \quad \text{ja} \quad S_2 = \lim_{n\to\infty} s_{2n}.$$

Nyt

$$S_1 - S_2 = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n-1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = 0,$$

joten $S_1 = S_2$. Harjoituksen 4 tehtävän 1 mukaan myös $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = S_1$. Todistus tälle ei ole pitkä, joten se on esitetty alla. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Tällöin on olemassa sellaiset n'_ε ja $n''_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\begin{aligned} |s_{2n-1} - S_1| < \varepsilon \quad &\text{kaikilla } 2n - 1 \geq n'_\varepsilon, \text{ ja} \\ |s_{2n} - S_1| < \varepsilon \quad &\text{kaikilla } 2n \geq n''_\varepsilon. \end{aligned}$$

Valitsemalla $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ nähdään, että

$$|s_k - S_1| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } k \geq n_\varepsilon.$$

Todistetaan lopuksi virhearviota $|S - s_n|$ koskeva tulos. Yllä esitetyn nojalla $s_{2n} \leq S \leq s_{2n-1}$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ Näin ollen

$$|S - s_{2n}| = S - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = x_{2n+1}$$

ja

$$|S - s_{2n-1}| = s_{2n-1} - S \leq s_{2n-1} - s_{2n} = x_{2n}.$$

Täten arvio

$$|S - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = x_{n+1}$$

pätee kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ □

Huomautus 2.4.4. Leibnizin lauseen tilanteessa sarja suppenee, jos ja vain jos $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$: Jos $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x_k$ suppenee, niin $\lim\limits_{k\to\infty} (-1)^{k+1} x_k = 0$, joten myös $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. Toisaalta ehto $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ sisältyy lauseen oletuksiin.

Esimerkki 2.4.5. Osoitetaan, että sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ suppenee.

Kirjoitetaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Tässä jono $\left(\frac{1}{k}\right)$ on vähenevä ja $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, joten sarja suppenee Leibnizin lauseen nojalla.

Virhearvio: Kuinka monta termiä osasummaan s_k on otettava, jotta summan S approksimoinnissa tehty virhe on pienempi kuin $\varepsilon > 0$? Jos osasummaan otetaan k termiä, niin $|S - s_k| \leq x_{k+1}$. Edelleen

$$x_{k+1} = \frac{1}{k+1} < \varepsilon \iff k > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Jos esimerkiksi $\varepsilon = 0{,}001$, niin $k > 999$, ja 1000 termiä riittää varmasti (vähempikin saattaa riittää, mutta sitä tästä ei näe).

Esimerkki 2.4.6. Leibnizin lauseen nojalla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^s}$$

suppenee aina, kun $s > 0$, sillä tällöin

$$x_k = \frac{1}{k^s} > 0, \quad x_k = \frac{1}{k^s} \geq \frac{1}{(k+1)^s} = x_{k+1} \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty} x_k = 0.$$

Esimerkki 2.4.7. Osoitetaan, että sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+2}{k}$ hajaantuu.

Osoitetaan, että $\lim\limits_{k\to\infty} (-1)^k \dfrac{k+2}{k}$ ei ole olemassa, jolloin sarja hajaantuu lemman 2.1.4 nojalla. Jonolla

$$x_k = (-1)^k \frac{k+2}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

on suppenevat osajonot

$$x_{2l} = \frac{2l}{2l+2} \to 1, \text{ kun } l \to \infty$$

ja

$$x_{2l-1} = -\frac{2l-1}{2l+1} \to -1, \text{ kun } l \to \infty.$$

Koska nämä osajonot suppenevat kohti eri lukuja, jono (x_k) hajaantuu. Huomaa, että esimerkin sarja on vuorotteleva ja sen termien itseisarvojen muodostama jono on vähenevä.

Yhteenveto sarjojen suppenemistarkastelusta

Tutkittaessa sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

suppenemista kannattaa noudattaa seuraavaa strategiaa:

(1) Onko

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0?$$

Ellei, niin sarja hajaantuu.

(2) Onko $x_k \geq 0$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$ (tai jostain indeksin arvosta lähtien)? Jos on, niin majorantti- ja minoranttiperiaate vertailusarjoina geometrinen sarja tai

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}.$$

Mahdollisesti suhdetesti, juuritesti tai vertailuperiaate.

(3) Jos termit vaihtavat merkkiään, niin suppeneeko sarja itseisesti?

(4) Onko sarja vuorotteleva ja voidaanko Leibnizin lausetta soveltaa?

(5) Miten sarjan positiivisten ja negatiivisten termien muodostamat sarjat käyttäytyvät? Onko toinen suppeneva ja toinen hajaantuva?

(6) Muut menetelmät ja kikkakolmoset.

Luku 3

Riemannin integraali

Määritelmä 3.0.8. Olkoot a, $b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$. Välin $[a, b]$ *jaoksi* kutsutaan äärellistä joukkoa $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, missä

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Pistettä x_k sanotaan *jakopisteeksi* ja väliä $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, sanotaan *jakoväliksi.* Lisäksi lukua

$$l(I_k) = x_k - x_{k-1},$$

sanotaan jakovälin I_k *pituudeksi*. Edelleen jakoa D' sanotaan jaon D *tihennykseksi*, jos $D \subseteq D'$.

Huomautus 3.0.9. (1) $D_0 = \{a, b\} \subseteq D$ jokaisella välin $[a, b]$ jaolla D.

(2) Jos D_1 ja D_2 ovat välin $[a, b]$ jakoja, niin

$$D_1 \subseteq D_1 \cup D_2 \quad \text{ja} \quad D_2 \subseteq D_1 \cup D_2.$$

Määritelmä 3.0.10. Olkoon $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio ja $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ välin $[a, b]$ jako. Funktion f *yläsummaksi* jaon D suhteen sanotaan summaa

$$S_D = S_D(f) = \sum_{k=1}^{n} l([x_{k-1}, x_k]) \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

ja *alasummaksi* summaa

$$s_D = s_D(f) = \sum_{k=1}^{n} l([x_{k-1}, x_k]) \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Huomautus 3.0.11. (1) Täydellisyysaksiooman nojalla ylläolevat supremum ja infimum ovat olemassa, sillä f on rajoitettu.

(2) Ala- ja yläsummille pätee järjestys $s_D \leq S_D$, sillä

$$\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \leq \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Esimerkki 3.0.12. $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Olkoon D välin $[0, 1]$ tasavälinen jako jakopisteinä $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Silloin

$$\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \min_{x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]} x^2 = \frac{(k-1)^2}{n^2}$$

ja

$$\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = \max_{x\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]} x^2 = \frac{k^2}{n^2}.$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
S_D &= \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Siten $S_D \to \frac{1}{3}$, kun $n \to \infty$. Vastaavasti

$$\begin{aligned}
s_D &= \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

ja täten $s_D \to \frac{1}{3}$, kun $n \to \infty$. Tässä on käytetty summakaavaa

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

joka voidaan todistaa induktiolla.

Lemma 3.0.13. *Jos $D \subseteq D'$, niin $S_{D'} \leq S_D$ ja $s_{D'} \geq s_D$.*

Todistus. Oletetaan aluksi, että $D' = D \cup \{x'\}$ ja

$$x_{k-1} < x' < x_k,$$

missä x_{k-1} ja x_k ovat jaon D pisteitä. Nyt

$$\sup_{x\in[x_{k-1},x']} f(x) \leq \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \quad \text{ja} \quad \sup_{x\in[x',x_k]} f(x) \leq \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x),$$

joten

$$\begin{aligned}
&l([x_{k-1},x']) \sup_{x\in[x_{k-1},x']} f(x) + l([x',x_k]) \sup_{x\in[x',x_k]} f(x) \\
&\leq l([x_{k-1},x']) \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) + l([x',x_k]) \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \\
&= (x' - x_{k-1} + x_k - x') \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \\
&= l([x_{k-1},x_k]) \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x).
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $S_{D'} \leq S_D$. Yleinen tapaus saadaan induktiolla. Alasummia koskeva väite $s_{D'} \geq s_D$ todistetaan samalla tavalla. □

Lemma 3.0.14. *Jos D_1 ja D_2 ovat välin $[a,b]$ jakoja, niin $s_{D_1} \leq S_{D_2}$.*

Todistus. Olkoon $D = D_1 \cup D_2$ (jakopisteet suuruusjärjestyksessä). Tällöin $D_1 \subseteq D$ ja $D_2 \subseteq D$. Lemman 3.0.13 ja huomautuksen 3.0.11(2) nojalla saadaan $s_{D_1} \leq s_D \leq S_D \leq S_{D_2}$. □

Olkoon D välin $[a, b]$ jako ja $D_0 = \{a, b\}$. Lemman 3.0.14 nojalla

$$S_D \geq s_{D_0} = (b - a) \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

ja

$$s_D \leq S_{D_0} = (b - a) \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Siten yläsummien joukko

$$\{S_D \mid D \text{ välin } [a, b] \text{ jako}\}$$

on alhaalta rajoitettu ja alasummien joukko

$$\{s_D \mid D \text{ välin } [a, b] \text{ jako}\}$$

on ylhäältä rajoitettu. Täydellisyysaksiooman nojalla

$$\overline{I} = \inf_D S_D \in \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad \underline{I} = \sup_D s_D \in \mathbb{R}$$

ovat olemassa, missä infimum ja supremum on laskettu välin $[a, b]$ kaikkien jakojen yli.

Määritelmä 3.0.15. Olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio sekä S_D ja s_D jakoa D vastaava ylä- ja alasummat. Yllä esiteltyä lukua $\overline{I} = \inf_D S_D$ sanotaan funktion f *yläintegraaliksi* ja lukua $\underline{I} = \sup_D s_D$ funktion f *alaintegraaliksi.*

Lemma 3.0.16. *Jokaiselle välin $[a, b]$ jaolle D pätee*

$$s_D \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_D.$$

Todistus. Olkoot D ja D' välin $[a, b]$ jakoja. Lemman 3.0.14 nojalla

$$s_D \leq S_{D'}.$$

Ottamalla oikealla puolella infimum jakojen D' yli (ja pitämällä jako D kiinnitettynä) saadaan

$$s_D \leq \inf_{D'} S_{D'} = \overline{I}.$$

Vastaavasti ottamalla vasemmalla puolella supremum jakojen D yli saadaan

$$\underline{I} = \sup_D s_D \leq \overline{I}.$$

□

Määritelmä 3.0.17. Rajoitettua funktiota $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sanotaan *Riemann-integroituvaksi*, jos

$$\underline{I} = \overline{I}.$$

Tällöin lukua

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \underline{I} = \overline{I}$$

sanotaan funktion f *Riemannin integraaliksi välin $[a, b]$ yli.*

Esimerkki 3.0.18. Olkoon $f(x) = c$ kaikilla $x \in [a,b]$. Olkoon lisäksi $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ välin $[a,b]$ jako. Nyt

$$\begin{aligned} S_D &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) = c(x_n - x_0) = c(b-a) \end{aligned}$$

ja vastavasti

$$s_D = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = c(b-a).$$

Nyt siis

$$\overline{I} = c(b-a) \quad \text{ja} \quad \underline{I} = c(b-a).$$

Tällöin f on Riemann-integroituva ja

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c(b-a).$$

Esimerkki 3.0.19. Osoitetaan, että funktio $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } -1 \le x \le 0, \\ -2, & \text{kun } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

on Riemann-integroituva välillä $[-1,1]$ ja lasketaan $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Olkoon $0 < \varepsilon < 1$. Jaolle $D = \{-1, 0, \varepsilon, 1\}$ on

$$S_D = 1(0-(-1)) + 1\varepsilon + (-2)(1-\varepsilon) = -1 + 3\varepsilon$$

ja

$$s_D = 1(0-(-1)) + (-2)\varepsilon + (-2)(1-\varepsilon) = -1.$$

Täten kaikilla $0 < \varepsilon < 1$ on voimassa arvio

$$-1 \le s_D \le \underline{I} \le \overline{I} \le S_D = -1 + 3\varepsilon,$$

joten $\underline{I} = \overline{I} = -1$. Siis f on Riemann-integroituva ja

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -1.$$

Huomaa: Epäjatkuva funktio voi siis olla Riemann-integroituva.

Esimerkki 3.0.20. Osoitetaan, että funktio $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]. \end{cases}$$

ei ole Riemann-integroituva.

Olkoon D välin $[0,1]$ jako. Jos $0 \leq x_{k-1} < x_k \leq 1$, niin

$$\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = 1 \quad \text{ja} \quad \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = 0.$$

Edelleen

$$S_D = \sum_{k=1}^{n} 1(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1$$

ja

$$s_D = \sum_{k=1}^{n} 0(x_k - x_{k-1}) = 0,$$

joten $\overline{I} = 1$ ja $\underline{I} = 0$. Siten f ei ole Riemann-integroituva. (Funktio f on kuitenkin Lebesgue-integroituva, Analyysi III.)

Esimerkki 3.0.21. Funktio

$$f \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & x = \frac{1}{n},\, n = 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{muulloin}, \end{cases}$$

on Riemann-integroituva ja epäjatkuva joukossa $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ (harjoitustehtävä). Riemann-integroituva funktio voi siis olla epäjatkuva äärettömän monessa pisteessä.

Esimerkki 3.0.22. (jatkoa esimerkkiin 3.0.12) Jatketaan funktion $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ tarkastelua. Olkoon D välin $[0,1]$ tasavälinen jako jakopisteinä $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Silloin

$$\overline{I} \leq S_D = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \to \frac{1}{3},$$

kun $n \to \infty$ ja

$$\underline{I} \geq s_D = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \to \frac{1}{3},$$

kun $n \to \infty$. Lemman 3.0.16 nojalla $\underline{I} \leq \overline{I}$, joten yllä olevan nojalla

$$\underline{I} = \overline{I} = \frac{1}{3}.$$

Siis f on Riemann-integroituva ja

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Lause 3.0.23 (Riemannin ehto)**.** *Rajoitettu funktio $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva, jos ja vain jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen välin $[a,b]$ jako D, että*

$$S_D - s_D < \varepsilon.$$

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että f on Riemann-integroituva. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja

$$I = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Koska $I = \overline{I} = \inf_D S_D$, niin lauseen A.0.36 nojalla on olemassa sellainen D_1, että

$$S_{D_1} < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2} = I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Edelleen $I = \underline{I} = \sup\limits_D s_D$, joten lauseen A.0.35 nojalla on olemassa sellainen D_2, että

$$s_{D_2} > \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} = I - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olkoon $D = D_1 \cup D_2$. Lemman 3.0.13 nojalla $S_D \leq S_{D_1}$ ja $s_D \geq s_{D_2}$, joten

$$S_D - s_D \leq S_{D_1} - s_{D_2} < I + \frac{\varepsilon}{2} - I + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

"$\Leftarrow$": Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen jako D, että

$$S_D - s_D < \varepsilon.$$

Lemman 3.0.16 nojalla $s_D \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_D$, joten

$$0 \leq \overline{I} - \underline{I} \leq S_D - s_D < \varepsilon \quad \text{kaikilla } \varepsilon > 0.$$

Tällöin $\overline{I} - \underline{I} = 0$ eli $\overline{I} = \underline{I}$. $\square$

Huomautus 3.0.24. Riemannin ehto on hyödyllinen, koska ylä- ja alaintegraaleja ei tarvitse osata laskea. Hyvät arviot ylä- ja alasummille riittävät.

Määritelmä 3.0.25. Funktiota $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sanotaan

(i) *kasvavaksi*, jos kaikilla $x, y \in [a,b]$ ehdosta $x \leq y$ seuraa $f(x) \leq f(y)$,

(ii) *väheneväksi*, jos kaikilla $x, y \in [a,b]$ ehdosta $x \leq y$ seuraa $f(x) \geq f(y)$,

(iii) *monotoniseksi*, jos se on kasvava tai vähenevä.

Esimerkki 3.0.26. Funktio

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{kun } \frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}, k = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

on monotoninen ja epäjatkuva joukossa $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Monotoninen funktio ei siis välttämättä ole jatkuva.

Lause 3.0.27. *Monotoninen funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva.*

Todistus. Oletetaan, että funktio f on kasvava. Silloin

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \text{kaikilla } x \in [a,b],$$

joten f on rajoitettu. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ välin $[a,b]$ tasavälinen jako, jolloin

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Koska f on kasvava, niin

$$\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_k)$$

ja

$$\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_{k-1}).$$

Tällöin

$$
\begin{aligned}
S_D - s_D &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1})) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\
&= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).
\end{aligned}
$$

Siten

$$S_D - s_D < \varepsilon,$$

kun

$$n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}.$$

Riemannin ehdon nojalla f on integroituva.

Jos funktio f on vähenevä, väite todistetaan samaan tapaan. Vähenevän tapauksen voi käsitellä myös käyttämällä lausetta 3.1.1(i) funktioon $-f = (-1)f$, joka on kasvava. □

Lause 3.0.28. *Suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva.*

Todistus. Lauseen 1.3.12 nojalla f on rajoitettu. Olkoon $\varepsilon > 0$. Lauseen 1.4.5 nojalla f on tasaisesti jatkuva välillä $[a, b]$, joten on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

kaikilla $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$. Olkoon D välin $[a, b]$ jako, jolle

$$x_k - x_{k-1} < \delta \quad \text{kaikilla } k = 1, 2, \dots, n.$$

Weierstrassin lauseen (lause 1.3.14) nojalla funktio f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa, joten on olemassa sellaiset $y_k, z_k \in [x_{k-1}, x_k]$, että

$$f(y_k) = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

ja

$$f(z_k) = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Nyt

$$\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(y_k) - f(z_k) < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

sillä

$$|y_k - z_k| \leq x_k - x_{k-1} < \delta.$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
S_D - s_D &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \Big(\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \Big) \\
&< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Väite seuraa nyt Riemannin ehdosta (lause 3.0.23). □

3.1 Integraalin perusominaisuuksia

Lause 3.1.1. *Olkoot f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integroituvia funktioita. Tällöin*

(i) jos $\alpha \in \mathbb{R}$, niin αf on Riemann-integroituva ja

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

(ii) $f+g$ on Riemann-integroituva

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

(iii) jos $a < c < b$, niin f on Riemann-integroituva väleillä $[a,c]$ ja $[c,b]$, sekä

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

(iv) jos $f(x) \le g(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$, niin

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

(v) $|f|$ on Riemann-integroituva ja

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Todistus. (i) Tarkastellaan funktiota $\alpha f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, missä $\alpha \neq 0$ (tapaus $\alpha = 0$ on selvä). Olkoon D välin $[a,b]$ mielivaltainen jako. Silloin

$$\begin{aligned}
S_D(\alpha f) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in [x_{k-1},x_k]} (\alpha f)(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in [x_{k-1},x_k]} \alpha f(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \alpha \sup_{x \in [x_{k-1},x_k]} f(x) \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in [x_{k-1},x_k]} f(x) \\
&= \alpha S_D(f).
\end{aligned}$$

Vastaavasti $s_D(\alpha f) = \alpha s_D(f)$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Koska f on integroituva, niin Riemannin ehdon (lause 3.0.23) nojalla löytyy sellainen välin $[a,b]$ jako D, että

$$S_D(f) - s_D(f) < \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
S_D(\alpha f) - s_D(\alpha f) &= \alpha S_D(f) - \alpha s_D(f) = \alpha(S_D(f) - s_D(f)) \\
&< \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Riemannin ehdon nojalla αf on integroituva. Edelleen kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x &\le S_D(\alpha f) = \alpha S_D(f) \le \alpha\Big(s_D(f) + \frac{\varepsilon}{\alpha}\Big) \\
&\le \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Täten

$$
\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x \le \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.
$$

Toisaalta

$$
\begin{aligned}
\alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\le \alpha S_D(f) \le \alpha\Big(s_D(f) + \frac{\varepsilon}{\alpha}\Big) = s_D(\alpha f) + \varepsilon \\
&\le \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Siten

$$
\alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x,
$$

joten yhtäsuuruus pätee.

(ii) Väitteen todistamisessa tarvitaan seuraavia aputuloksia: Olkoon $A \subseteq [a, b]$, $A \neq \emptyset$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\sup_{x \in A}(f(x) + g(x)) &\le \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x) \\
\inf_{x \in A}(f(x) + g(x)) &\ge \inf_{x \in A} f(x) + \inf_{x \in A} g(x).
\end{aligned}
$$

Näistä ylemmän epäyhtälön todistus oli harjoituksen 1 tehtävässä 5 ja alempi todistetaan vastaavasti.

Olkoon D välin $[a, b]$ jako, jolloin

$$
\begin{aligned}
S_D(f + g) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} (f + g)(x) \\
&\le \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \Big(\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) + \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} g(x) \Big) \\
&= (x_k - x_{k-1}) \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} g(x) \\
&= S_D(f) + S_D(g).
\end{aligned}
$$

Vastaavasti saadaan

$$
s_D(f + g) \ge s_D(f) + s_D(g).
$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska f ja g ovat integroituvia, niin Riemannin ehdon (lause 3.0.23) nojalla on olemassa sellaiset jaot D_1 ja D_2, että

$$S_{D_1}(f) - s_{D_1}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$S_{D_2}(g) - s_{D_2}(g) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olkoon $D = D_1 \cup D_2$. Silloin lemman 3.0.13 nojalla

$$\begin{aligned} S_D(f+g) - s_D(f+g) &\leq S_D(f) + S_D(g) - s_D(f) - s_D(g) \\ &\leq S_{D_1}(f) - s_{D_1}(f) + S_{D_2}(g) - s_{D_2}(g) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

joten Riemannin ehdon nojalla funktio $f + g$ on integroituva. Lisäksi lemman 3.0.13 nojalla

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x &\leq S_D(f+g) \leq S_D(f) + S_D(g) \\ &\leq S_{D_1}(f) + S_{D_2}(g) \leq s_{D_1}(f) + \frac{\varepsilon}{2} + s_{D_2}(g) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x &\geq s_D(f+g) \geq s_D(f) + s_D(g) \\ &\geq s_{D_1}(f) + s_{D_2}(g) \geq S_{D_1}(f) - \frac{\varepsilon}{2} + S_{D_2}(g) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Loput kohdat todistuksesta jätetään harjoitustehtäviksi. □

Määritelmä 3.1.2. (täydennys integraalin määritelmään) Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, on Riemann-integroituva, niin asetetaan

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

ja

$$\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad a \leq c \leq b.$$

Huomautus 3.1.3. Seuraavat kaksi asiaa ovat mukana lähinnä asiasta kiinnostuneille ylimääräiseksi luettavaksi.

Riemannin alkuperäinen määritelmä poikkeaa hieman esittämästämme määritelmästä 3.0.17: Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ välin $[a,b]$ jako. Merkitään $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ja

$$|D| = \max\{l(I_k) = x_k - x_{k-1} \mid k = 1, 2, \ldots, n\}$$

Luku $|D|$ on siis suurimman jakovälin pituus. Valitaan mielivaltaisesti $\lambda_k \in I_k$ ja merkitään

$$S_D(f,\lambda) = S_D(f,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} l(I_k) f(\lambda_k)$$

ja kutsutaan tätä funktioon f, jakoon D ja vektoriin $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ liittyväksi Riemannin summaksi. Silloin

$$s_D \leq S_D(f,\lambda) \leq S_D.$$

Määritellään uudentyyppinen raja-arvo, kun jakoa tihennetään: Luku $I \in \mathbb{R}$ on funktion f Riemannin summien raja-arvo

$$I = \lim_{|D|\to 0} S_D(f,\lambda),$$

jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|S_D(f,\lambda) - I| < \varepsilon$$

kaikilla jaoilla D, joilla $|D| < \delta$ valittiinpa pisteet λ_k miten hyvänsä. Voidaan todistaa, että f on Riemann-integroituva jos ja vain jos raja-arvo

$$\lim_{|D|\to 0} S_D(f,\lambda)$$

on olemassa. Tällöin

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{|D|\to 0} S_D(f,\lambda).$$

Tässä siis integraali määritellään summien raja-arvona eikä määritelmässä tarvita supremumia tai infimumia, mutta vaikeudet "lakaistaan maton alle".

Toisena mainittakoon, että Riemann-integroituvat funktiot voidaan karakterisoida ns. Lebesguen ehdon avulla: Rajoitettu funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva, jos ja vain jos sen epäjatkuvuuspisteide joukko on nollamitallinen. Tätä ei todisteta tällä kurssilla.

Joukon $A \subseteq \mathbb{R}$ nollamitallisuus tarkoittaa sitä, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellaiset avoimet välit $]a_n,b_n[$, $n = 1,2,\ldots$, että

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \,]a_n,b_n[\quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon.$$

Nollamitallinen joukko voidaan siis peittää yhteispituudeltaan mielivaltaisen lyhyillä avoimilla väleillä.

Esimerkiksi $\mathbb{Q}$ on nollamitallinen. Tämä havaitaan tarkastelemalla jonoa, joka sisältää kaikki rationaaliluvut täsmälleen kerran. Aikaisemmin osoitettiin, että tällainen jono, eli bijektio $\mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}$, on olemassa. Merkitään tätä jonoa (q_n), jolloin

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}.$$

Esimerkiksi jono

$$0, \quad \tfrac{1}{1}, -\tfrac{1}{1}, \quad \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}, -\tfrac{2}{1}, \quad \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{1}, -\tfrac{3}{1},$$
$$\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{4}{1}, -\tfrac{4}{1}, \quad \tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{5}{1}, -\tfrac{5}{1}, \ldots$$

käy. Olkoon $\varepsilon > 0$. Nyt

$$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left] q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \right[$$

ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} - \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \right) \right) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{n+2}} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} < \varepsilon.$$

Huomaa, että vaikka rationaalipisteet ovatkin tiheässä, ne voidaan peittää väleillä, joiden yhteenlaskettu pituus on mielivaltaisen pieni.

3.2 Analyysin peruslause

Perehdytään seuraavaksi Riemannin integraalin ja derivaatan yhteyteen.

Määritelmä 3.2.1. Avoimella välillä määriteltyä funktiota $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ sanotaan *derivoituvaksi pisteessä* $x_0 \in\ ]a,b[$, jos raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

on olemassa. Jos f on derivoituva jokaisessa pisteessä $x \in\ ]a,b[$, niin funktiota f sanotaan *derivoituvaksi välillä* $]a,b[$. Tällöin derivaatta määrittelee *derivaattafunktion* $f'\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$. Jos f' on jatkuva välillä $]a,b[$, niin funktiota f sanotaan *jatkuvasti derivoituvaksi välillä* $]a,b[$.

Huomautus 3.2.2. (1) Derivaatan määritelmässä on sisältää funktion raja-arvo (määritelmä 1.2.1). Sitä ei voi laskea sijottamalla $h = 0$, sillä silloin joudutaan $\frac{0}{0}$-tilanteeseen.

(2) Derivaatan määritelmä voidaan myös kirjoittaa muodossa:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

(3) Jos f on derivoituva pisteessä x_0, niin f on jatkuva pisteessä x_0:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0) \big) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Siis

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

joten huomautuksen 1.3.6 mukaan f on jatkuva pisteessä x_0.

(4) Vaikka f olisikin derivoituva jokaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}$, niin derivaattafunktion f' ei tarvitse olla jatkuva.

Esimerkki 3.2.3. Tarkastellaan funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Jos $x \neq 0$, niin

$$f'(x) = 2x \sin \tfrac{1}{x^2} + x^2(-2x^{-3}) \cos \tfrac{1}{x^2} = 2x \sin \tfrac{1}{x^2} - \tfrac{2}{x} \cos \tfrac{1}{x^2}.$$

Olkoon sitten $x = 0$. Todistetaan, että $f'(0) = 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin

$$\Big|\frac{f(h) - f(0)}{h} - 0\Big| = \Big|\frac{f(h) - f(0)}{h}\Big| = \Big|h \sin \frac{1}{h^2}\Big| \leq |h| < \varepsilon,$$

kun $0 < |h| < \varepsilon$. Voidaan siis valita $\delta = \varepsilon$ funktion raja-arvon määritelmässä 1.2.1, joten $f'(0) = 0$. Siten derivaattafunktio on $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Raja-arvoa $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ ei kuitenkaan ole olemassa, joten f' ei ole jatkuva pisteessä 0. Lisäksi f' ei ole rajoitettu pisteen 0 ympäristössä, joten f' ei ole Riemann-integroituva välillä $[-1, 1]$.

Lause 3.2.4 (analyysin peruslause, osa I)**.** *Oletetaan, että funktio $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva ja asetetaan*

$$F\colon [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tällöin seuraavat ominaisuudet pätevät.

(i) Funktio F on tasaisesti jatkuva välillä $[a, b]$, erityisesti F on jatkuva.

(ii) Jos f on jatkuva pisteessä $x \in\,]a, b[$, niin F on derivoituva pisteessä x ja

$$F'(x) = f(x).$$

Todistus. (i) Olkoot $x, y \in [a, b]$, $\varepsilon > 0$ ja $M = \sup\limits_{u \in [a,b]} |f(u)|$. Oletetaan ensin, että $x < y$. Lauseen 3.1.1 kohtien (iii) ja (v) avulla saadaan

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \Big|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t\Big| = \Big|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \\ &\leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq M(y - x) = M|y - x| < \varepsilon, \end{aligned}$$

kun $|x - y| < \dfrac{\varepsilon}{M + 1}$. Tapauksessa $x > y$ saadaan vastaavasti

$$|F(x) - F(y)| \leq M|y - x| < \varepsilon,$$

kun $|x - y| < \dfrac{\varepsilon}{M + 1}$. Valitsemalla $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M + 1}$ saadaan

$$|F(x) - F(y)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } |x - y| < \delta.$$

Täten F on tasaisesti jatkuva välillä $[a, b]$ (määritelmä 1.4.2) ja myös jatkuva välillä $[a, b]$ (huomautus 1.4.3 (2)).

(ii) Jos F on derivoituva pisteessä x, niin

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Osoitetaan, että $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$. Nyt

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\Big| &= \Big|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,\mathrm{d}t\Big| \\ &\le \frac{1}{|h|}\Big|\int_x^{x+h} |f(x) - f(t)|\,\mathrm{d}t\Big|.\end{aligned}$$

Koska f on jatkuva pisteessä x, niin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kun } |x - t| < \delta.$$

Jos $0 < |h| < \delta$, niin myös $0 \le |x - t| \le |h| < \delta$ ja siten

$$\frac{1}{|h|}\Big|\int_x^{x+h} |f(x) - f(t)|\,\mathrm{d}t\Big| \le \frac{1}{|h|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot |h| < \varepsilon.$$

Siten

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

□

Huomautus 3.2.5. (1) Muista, että funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integraalifuktio on sellainen jatkuva $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in\ ]a, b[$. Väite (ii) edellisessä lauseessa tarkoittaa, että jos f on jatkuva koko välillä $[a, b]$, niin $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ on funktion f yksi integraalifunktio. Lause antaa siis keinon määrittää annetun funktion integraalifunktio.

(2) Vaikka lause 3.2.4 antaa funktion F olemassaolon, niin aina tätä ei pysty esittämään helposti. Esimerkiksi, jos $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$, niin lauseen 3.2.4 mukaan on olemassa sellainen funktio $F\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in [-1, 1]$. Kuitenkaan tämä funktio

$$F(x) = \int_{-1}^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

ei ole esitettävissä alkeisfunktioiden avulla.

(3) Lauseen 3.2.4 jälkimmäisessä väitteessä integraali alkaa funktion f määrittelyvälin alkupisteestä, mutta tämä ei ole välttämätöntä: Jos $c \in\ ]a, b[$, $c < x < b$ ja lauseen 3.2.4 muut oletukset ovat voimassa, niin

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

(tapaus $x < c < b$ todistetaan vastaavasti). Tässä $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ on vakio muuttujan x suhteen, joten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F'(x) = f(x).$$

Esimerkki 3.2.6. Tarkastellaan ns. *Heavisiden funktiota* $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, missä

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } -1 \le x < 0, \\ 1, & \text{kun } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Tällöin f on Riemann-integroituva välillä $[-1,1]$ ja

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & \text{kun } -1 \le x < 0, \\ x, & \text{kun } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Nyt $F'(x) = f(x)$, kun $x \neq 0$, mutta F ei ole derivoituva pisteessä 0. Funktiolla f ei ole integraalifunktiota.

Lause 3.2.7 (analyysin peruslause, osa II). *Jos $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on sellainen derivoituva funktio, että*

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{kaikilla } x \in \ ]a,b[$$

ja f on Riemann-integroituva välillä $[a,b]$ (välin päätepisteissä f voidaan määritellä miten halutaan), niin

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Riemannin ehdon nojalla on olemassa sellainen välin $[a,b]$ jako $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, että

$$S_D(f) - s_D(f) < \varepsilon.$$

Väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen $\lambda_k \in \ ]x_{k-1}, x_k[$, että

$$\begin{aligned} F(x_k) - F(x_{k-1}) &= F'(\lambda_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= f(\lambda_k)(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)(x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$s_D(f) \le F(b) - F(a) \le S_D(f).$$

Toisaalta

$$s_D(f) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le S_D(f).$$

Nyt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le S_D(f) < s_D(f) + \varepsilon \le F(b) - F(a) + \varepsilon$$

ja toisaalta

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge s_D(f) > S_D(f) - \varepsilon \ge F(b) - F(a) - \varepsilon.$$

Siten

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (F(b) - F(a)) \right| < \varepsilon.$$

Koska tämä pätee kaikilla $\varepsilon > 0$, saadaan väite. $\square$

Huomautus 3.2.8. Lause 3.2.7 antaa keinon laskea tiettyjen funktioiden integraaleja. Lause 3.2.7 esitetään usein seuraavassa muodossa: jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva, niin

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

Välin päätepisteissä derivaatan arvoksi tulevat toispuoleiset derivaatat.

Esimerkki 3.2.9. Esimerkkejä lauseen 3.2.7 käytöstä.

Oikea käyttö:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \Big/_{1}^{2} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Lausetta 3.2.7 voidaan käyttää, koska $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ on (suljetulla välillä) jatkuva.

Väärä käyttö:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \Big/_{-1}^{1} -\frac{1}{x} = -1 - 1 = -2.$$

Vastaus on järjetön, sillä $\frac{1}{x^2} > 0$, mutta integraali on negatiivinen. Nyt Lausetta 3.2.7 ei voida käyttää, koska $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ei ole integroituva.

Esimerkki 3.2.10. (1) Yhtälöä (3.1) ei voi käyttää epäjatkuville funktioille. Olkoon esimerkiksi

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0,\\ 1, & \text{kun } x \geq 0.\end{cases}$$

Nyt $f'(x) = 0$, kun $x \neq 0$. Derivaattaa $f'(0)$ ei kuitenkaan ole olemassa, eikä siten integraaleja $\int_{-1}^x f'(t)\,\mathrm{d}t$, kun $x \geq 0$. Toisaalta, jos $f'(0)$ määritellään miten tahansa, niin $\int_{-1}^x f'(t)\,\mathrm{d}t = 0$ kaikilla $x \in [-1,1]$. Erityisesti

$$f(-1) + \int_{-1}^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = 0 \neq 1 = f(1),$$

eikä yhtälö (3.1) ole voimassa.

(2) Yhtälö (3.1) ei välttämättä ole voimassa vaikka f olisi derivoituva jokaisessa pisteessä:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & \text{kun } x \neq 0,\\ 0, & \text{kun } x = 0.\end{cases}$$

Tämä esimerkki oli aikaisemmin esillä. Nyt f on derivoituva, mutta derivaatta f' ei ole rajoitettu pisteen 0 ympäristössä eikä f' ole Riemann-integroituva. Tässä tapauksessa derivaatta f' ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$.

Todistetaan tämän luvun lopuksi vielä osittaisintegrointikaava. Sitä varten tarvitaan seuraava lemma.

Lemma 3.2.11. *Olkoot f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integroituvia funktioita. Tällöin funktiot f^2 ja fg ovat Riemann-integroituvia.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että f^2 on Riemann-integroituva. Koska f on integroituva, se on rajoitettu ja on olemassa sellainen $M > 0$, että $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in [a,b]$. Olkoon $\varepsilon > 0$, jolloin Riemannin ehdon nojalla on olemassa sellainen välin $[a,b]$ jako $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$, että

$$S_D(f) - s_D(f) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Jos $x,\, y \in [x_{k-1}, x_k]$, niin

$$\begin{aligned} f^2(x) - f^2(y) &\le |f^2(x) - f^2(y)| = |f(x) - f(y)||f(x) + f(y)| \\ &\le |f(x) - f(y)|2M \le 2M \sup_{x,\, y \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x) - f(y)| \\ &= 2M\Big(\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) - \inf_{y \in [x_{k-1}, x_k]} f(y) \Big). \end{aligned}$$

Käytetään tässä esiintyvälle sulkulausekkeelle merkintää c_k, jolloin

$$\begin{aligned} & f^2(x) \le 2Mc_k + f^2(y) \qquad \text{kaikilla } x,\, y \in [x_{k-1}, x_k] \\ \implies & \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f^2(x) \le 2Mc_k + f^2(y) \qquad \text{kaikilla } y \in [x_{k-1}, x_k] \\ \implies & \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f^2(x) \le 2Mc_k + \inf_{y \in [x_{k-1}, x_k]} f^2(y). \end{aligned}$$

Täten $\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f^2(x) - \inf_{y \in [x_{k-1}, x_k]} f^2(y) \le 2Mc_k$ ja saadaan

$$\begin{aligned} S_D(f^2) - s_D(f^2) &= \sum_{k=1}^{n} l([x_{k-1}, x_k])\Big(\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f^2(x) - \inf_{y \in [x_{k-1}, x_k]} f^2(y) \Big) \\ &\le \sum_{k=1}^{n} l([x_{k-1}, x_k]) 2Mc_k = 2M \sum_{k=1}^{n} l([x_{k-1}, x_k]) c_k \\ &= 2M \sum_{k=1}^{n} l([x_{k-1}, x_k])\Big(\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) - \inf_{y \in [x_{k-1}, x_k]} f(y) \Big) \\ &= 2M\big(S_D(f) - s_D(f)\big) \le 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Riemannin ehdon mukaan funktio f^2 on integroituva välillä $[a, b]$.

Funktiota fg koskeva väite seuraa siitä, että

$$f(x)g(x) = \tfrac{1}{4}\big((f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2\big)$$

kaikilla $x \in [a, b]$. Käyttämällä funktioiden $(f + g)^2$ ja $(f - g)^2$ integroituvuutta sekä lauseen 3.1.1 kohtia (ii) ja (i) saadaan jälkimmäinen väite. □

Lause 3.2.12 (osittaisintegrointikaava)**.** *Oletetaan, että* $u,\, v\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *ovat jatkuvia ja välillä* $]a, b[$ *derivoituvia funktioita ja että* u' *ja* v' *ovat Riemann-integroituvia välillä* $[a, b]$ *(välin päätepisteissä* u' *ja* v' *voidaan määritellä miten halutaan). Silloin*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Todistus. Määritellään $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = u(x)v(x)$. Tällöin

$$f'(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x) \quad \text{kaikilla } x \in\,]a, b[.$$

Lemman 3.2.11 nojalla f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$. Lauseiden 3.2.7 ja 3.1.1 (ii) nojalla

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

mistä väite seuraa. □

Luku 4

Epäoleelliset integraalit

Luvussa 5 määritelty Riemannin integraali toimii vain rajoitetuille funktioille, jotka on määritelty suljetulla ja rajoitetulla välillä.

Esimerkki 4.0.13. Olkoon $f\colon\ ]0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Nyt f ei ole rajoitettu, eikä määrittelyväli ole suljettu. Olkoon $0 < c < 1$. Koska f on integroituva välillä $[c,1]$, niin voidaan tutkia raja-arvoa

$$\lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0+} \Big/_c^1 2\sqrt{x} = \lim_{c\to 0+} 2(1-\sqrt{c}) = 2.$$

Huomaa, että kuvaajan rajoittama pinta-ala on luonnollista tulkita Riemann-integraalien rajana.

Olkoon $f\colon\ [1,\infty[\ \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Nyt f on rajoitettu, mutta määrittelyväli ei ole rajoitettu. Olkoon $c > 1$. Koska f on integroituva välillä $[1,c]$, niin voidaan tutkia raja-arvoa

$$\lim_{c\to \infty} \int_1^c \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to \infty} \Big/_1^c 2\sqrt{x} = \lim_{c\to \infty} 2(\sqrt{c}-1) = \infty.$$

Määritelmä 4.0.14. Olkoot $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Jos funktio $f\colon\ ]a,b] \to \mathbb{R}$ on integroituva välin $]a,b]$ jokaisella suljetulla ja rajoitetulla osavälillä ja jos raja-arvo

$$\lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

on olemassa, niin sanotaan, että *epäoleellinen integraali* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *suppenee* ja määritellään

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jos raja-arvoa ei ole olemassa, niin sanotaan, että *epäoleellinen integraali* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *hajaantuu.* Jos $a = -\infty$, niin merkinällä $c \to a+$ tarkoitetaan, että $c \to -\infty$. Tällöin merkitään

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to -\infty} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jos $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $a < b$, niin epäoleellinen integraali $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ määritellään samaan tapaan.

Esimerkki 4.0.15. (1) Suoraan saadaan

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \Big/_0^c -e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}(1-e^{-c}) = 1.$$

(2) Lauseen 3.2.12 nojalla

$$\int_1^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{c}{e^c}+\frac{1}{e}+\int_1^c e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{c}{e^c}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}-\frac{1}{e^c}\right) = \frac{2}{e}.$$

Lause 4.0.16. *Integraali*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x$$

suppenee, jos ja vain jos $s < 1$.

Todistus. Olkoon $0 < c < 1$. Jos $s \neq 1$, niin

$$\int_c^1 x^{-s}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-s}\Big/_c^1 x^{1-s} = \frac{1}{1-s}(1-c^{1-s}).$$

Jos $s < 1$, niin

$$\frac{1}{1-s}(1-c^{1-s}) \to \frac{1}{1-s}, \quad \text{kun } c \to 0+,$$

ja integraali suppenee. Jos $s > 1$, niin

$$\frac{1}{1-s}(1-c^{1-s}) \to \infty, \quad \text{kun } c \to 0+,$$

ja integraali hajaantuu. Jos $s = 1$, niin

$$\int_c^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big/_c^1 \ln x = -\ln c \to \infty, \quad \text{kun } c \to 0+,$$

joten integraali hajaantuu. Siis $\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x$ suppenee, jos ja vain jos $s < 1$. □

Lause 4.0.17. *Integraali*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x$$

suppenee, jos ja vain jos $s > 1$.

Todistus. Olkoon $c > 1$. Jos $s \neq 1$, niin

$$\int_1^c \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-s}\Big/_1^c x^{1-s} = \frac{1}{1-s}(c^{1-s}-1).$$

Jos $s < 1$, niin

$$\frac{1}{1-s}(c^{1-s}-1) \to \infty, \quad \text{kun } c \to \infty,$$

ja integraali hajaantuu. Toisaalta, jos $s > 1$, niin

$$\frac{1}{1-s}(c^{1-s}-1) \to \frac{1}{s-1}, \quad \text{kun } c \to \infty,$$

ja integraali suppenee. Jos $s = 1$, niin

$$\int_1^c \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \Big/_1^c \ln x = \ln c \to \infty, \quad \text{kun } c \to \infty,$$

joten integraali hajaantuu. Siis $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x$ suppenee, jos ja vain jos $s > 1$. □

Määritelmä 4.0.18. Olkoon $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ja $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < b$, sekä $d \in]a, b[$ kiinteä. Olkoon $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ integroituva välin $]a, b[$ jokaisella suljetulla ja rajoitetulla osavälillä. Jos molemmat epäoleelliset integraalit

$$\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{ja} \quad \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

suppenevat, niin sanotaan, että epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenee ja sen arvoksi asetetaan

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Huomaa, että pisteen d valinta ei vaikuta suppenemiseen eikä integraalin arvoon. Näin on, sillä jos jakopisteinä käytetään lukuja d_1 ja d_2, missä $d_1 < d_2$, niin $\int_a^{d_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{d_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d_1}^{d_2} f(x)\,\mathrm{d}x$. Tässä jälkimmäinen integraali on tavallinen Riemannin integraali eikä se vaikuta suppenemiseen. Määritelmässä esiintyvän jälkimmäisen integraalin tapauksessa käy vastaavasti.

Esimerkki 4.0.19. (1) Millä arvoilla $s \in \mathbb{R}$ integraali $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x$ suppenee?

Ratkaisu: Epäoleellisuus on sekä ala- että ylärajalla. Kirjoitetaan

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x.$$

Lauseen 4.0.16 nojalla $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x$ suppenee, jos ja vain jos $s < 1$ ja lauseen 4.0.17 nojalla $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x$ suppenee, jos ja vain jos $s > 1$. Siten integraali $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu kaikilla $s \in \mathbb{R}$.

(2) Tarkastellaan integraalia $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Epäoleellisuus on sekä ala- että ylärajalla. Olkoon $-1 < b < 0 < c < 1$. Tällöin

$$\int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \Big/_0^c \overline{\arcsin}\, x = \overline{\arcsin}\, c \to \overline{\arcsin}\, 1 = \frac{\pi}{2},$$

kun $c \to 1-$, ja vastaavasti

$$\int_b^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \Big/_b^0 \overline{\arcsin}\, x = -\overline{\arcsin}\, b \to -\overline{\arcsin}(-1) = \frac{\pi}{2},$$

kun $b \to -1+$. Siten

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

(3) Tarkastellaan integraalia $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\,\mathrm{d}x$. Nyt

$$\int_0^c \sin x\,\mathrm{d}x = -\Big/_0^c \cos x = 1 - \cos c.$$

Koska raja-arvoa

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c \sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} (1 - \cos c) = 1 - \lim_{c\to\infty} \cos c$$

ei ole olemassa, niin integraali $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\,\mathrm{d}x$ hajaantuu.

(4) Tarkastellaan integraalia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Esimerkin 4.0.15 nojalla integraali $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ suppenee. Toisaalta

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{0} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \Big/_{c}^{0} -e^{-x} \\ &= \lim_{c\to-\infty}(e^{-c}-1) = \infty,\end{aligned}$$

joten $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu. Siten

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

hajaantuu.

Huomautus 4.0.20. Yleisesti

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \neq \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Esimerkiksi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$$

hajaantuu (ks. ylläoleva esimerkki), mutta

$$\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c} \sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \Big/_{-c}^{c} (-\cos x) = 0.$$

Lause 4.0.21 (majorantti- ja minoranttiperiaate)**.** *Olkoon $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $a < b$ ja olkoot funktiot f, $g\colon\ [a,b[\ \to \mathbb{R}$ integroituvia jokaisella välin $[a,b[$ suljetulla ja rajoitetulla osavälillä. Oletetaan, että $0 \le f(x) \le g(x)$ kaikilla $x \in [a,b[$.*

(i) Jos majorantti $\displaystyle\int_{a}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$ suppenee, niin $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenee.

(ii) Jos minorantti $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ hajaantuu, niin $\displaystyle\int_{a}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$ hajaantuu.

Huomautus 4.0.22. Muunlaisille epäoleellisille integraaleille majorantti- ja minoranttiperiaate muotoillaan ja todistetaan samaan tapaan.

Todistus. (i) Määritellään kuvaus $F\colon\ [a,b[\ \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$F(c) = \int_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{kaikilla } c \in [a,b[.$$

Koska $f(x) \ge 0$ kaikilla $x \in [a,b[$, niin F on kasvava muuttujan c funktio (harjoitustehtävä). Silloin

$$\begin{aligned} &\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ suppenee} \\ \iff\quad &\text{on olemassa } \lim_{c\to b-} F(c) = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R} \\ \iff\quad &F \text{ on ylhäältä rajoitettu (vertaa lauseeseen B.2.3).}\end{aligned}$$

Nyt $0 \leq f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in [a, b[$ ja integraali $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ suppenee. On siis olemassa sellainen $M \in \mathbb{R}$, että

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x \leq M \quad \text{kaikilla } c \in [a, b[,$$

joten $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ on rajoitettu ja ylläolevan nojalla se suppenee.

(ii) Jos integraali $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ suppenisi, niin kohdan (i) nojalla myös integraali $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenee, mikä on ristiriita.

□

Esimerkki 4.0.23. Tarkastellaan integraalia

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Epäoleellisuus on sekä ala- että ylärajoilla, joten kirjoitetaan

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

ja tutkitaan erikseen integraaleja $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ja $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Olkoon ensin $0 < x \leq 1$. Tällöin $e^{-x} \leq e^0 = 1$, joten $0 < \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Lauseen 4.0.16 nojalla integraali $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ suppenee, joten majoranttiperiaatteen nojalla myös integraali $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ suppenee.

Olkoon sitten $x \geq 1$. Tällöin $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$, joten $0 < \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq e^{-x}$. Olkoon lisäksi $c > 1$, jolloin

$$\int_1^c e^{-x}\,\mathrm{d}x = -\Big/_1^c e^{-x} = e^{-1} - e^{-c} \to \frac{1}{e}, \text{ kun } c \to \infty,$$

Siten $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$ suppenee. Majoranttiperiaatteen nojalla $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ suppenee.

Edelläolevan nojalla $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ suppenee.

Esimerkki 4.0.24. Tarkastellaan integraalia

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Epäoleellisuus on integroimisvälin ylärajalla. Pisteen 0 ympäristössä funktiolle $\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ ei saada riittävän hyviä arvioita, joten kirjoitetaan

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Tässä ensimmäinen osaintegraaleista on tavallinen integraali, joka suppenee. Tutkitaan jälkimmäisen integraalin suppenemista. Olkoon $x \geq 1$. Tällöin $\sqrt{x^2+x+1} \leq \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$, joten

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Lauseen 4.0.17 nojalla $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu, joten minoranttiperiaatteen nojalla $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu. Siten myös integraali $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu.

Määritelmä 4.0.25. Olkoot $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $a < b$, ja olkoon funktio $f\colon\ [a,b[\ \to \mathbb{R}$ integroituva välin $[a,b[$ jokaisella suljetuilla osavälillä. Jos $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ suppenee, niin sanotaan, että epäoleellinen integraali $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *suppenee itseisesti.*

Huomautus 4.0.26. Lauseen 3.1.1 (v)-kohdan nojalla $|f|$ on integroituva välin $[a,b[$ suljetuilla osaväleillä.

Itseinen suppeneminen määritellään muille epäoleellisuuden tyypeille (eli $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$ ja $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$) vastaavasti, vertaa aiempiin määritelmiin.

Lause 4.0.27. *Jos $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenee itseisesti, niin se suppenee ja*

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Todistus. Koska

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

kaikilla $x \in [a,b[$, niin

$$0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$$

kaikilla $x \in [a,b[$. Integraali $\displaystyle\int_a^b 2|f(x)|\,\mathrm{d}x$ suppenee, joten majoranttiperiaatteen nojalla

$$\int_a^b (f(x)+|f(x)|)\,\mathrm{d}x$$

suppenee. Lisäksi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{c\to b-}\int_a^c \big((f(x)+|f(x)|) - |f(x)|\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{c\to b-}\int_a^c (f(x)+|f(x)|)\,\mathrm{d}x - \lim_{c\to b-}\int_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

joten $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenee. Tällöin

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big| &= \Big|\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\Big| && \text{(raja-arvo on olemassa)}\\ &= \lim_{c\to b-}\Big|\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\Big| && \text{(raja-arvo on olemassa)}\\ &\leq \lim_{c\to b-}\int_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x && \text{(lause 3.1.1 (v))}\\ &= \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x && \text{(integraali suppenee itseisesti).}\end{aligned}$$

□

Huomautus 4.0.28. Muunlaisille epäoleellisille integraaleille itseinen suppeminen määritellään vastaavalla tavalla. Lisäksi lausetta 4.0.27 vastaava tulos pätee myös muille epäoleellisille integraaleille.

Esimerkki 4.0.29. Osoitetaan, että integraali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ suppenee, mutta ei suppene itseisesti.

Olkoon $c > 1$. Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned}\int_1^c \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \Big/_1^c \frac{-\cos x}{x} - \int_1^c (-\cos x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \cos 1 - \frac{\cos c}{c} - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Koska $0 \le \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$, kun $x \ge 1$, niin majoranttiperiaatteen nojalla

$$\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\mathrm{d}x$$

suppenee, joten lauseen 4.0.27 nojalla

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

suppenee. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}\lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{c\to\infty}\left(\cos 1 - \frac{\cos c}{c}\right) - \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

joten $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ suppenee.

Itseinen suppeneminen: Toisaalta

$$\begin{aligned}\int_\pi^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x &= \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x\\ &\ge \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=2}^n \frac{2}{k\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \to \infty,\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$, sillä harmoninen sarja hajaantuu. Raja-arvoa

$$\lim_{n\to\infty}\int_\pi^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$$

ei siis ole olemassa, joten integraali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ ei suppene itseisesti.

Esimerkki 4.0.30. Tarkastellaan integraalia $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Kirjoitetaan

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

ja tutkitaan erikseen osaintegraalien suppenemista. Edellisen esimerkin nojalla $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ suppenee. Vastaavasti integraali $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ suppenee, sillä kun $c > 1$, niin

$$\int_{-c}^{-1} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{-c} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{-c} \frac{\sin(-x)}{-x}\,(-\mathrm{d}x) = \int_1^c \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Kun $0 < |x| \leq 1$, niin $|\sin x| \leq |x|$ (PM I), joten $0 \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$. Majoranttiperiaatteen nojalla integraalit

$$\int_{-1}^0 \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \qquad \text{ja} \qquad \int_0^1 \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$$

suppenevat, joten lauseen 4.0.27 nojalla integraalit

$$\int_{-1}^0 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{ja} \qquad \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

suppenevat. Koska kaikki osaintegraalit suppenevat, niin myös integraali $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ suppenee.

Yhteenveto epäoleellisten integraalien suppenemistarkastelusta

Tutkittaessa epäoleellisen integraalin suppenemista kannattaa noudattaa seuraavaa strategiaa:

(1) Tutki, missä epäoleellisuudet ovat ja määrittele epäoleellinen integraali rajaprosessin avulla.

(2) Voidaanko rajaprosessissa olevat tavalliset Riemannin integraalit laskea auki?

(3) Onko integroitava funktio positiivinen? Kokeile majorantti- ja minoranttiperiaatetta vertailuintegraaleina

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x \quad \text{ja} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x.$$

(4) Jos integroitava funktio vaihtaa merkkiään, niin suppeneeko integraali itseisesti?

(5) Suppeneeko integraali jostain muusta syystä?

Luku 5

Funktiojonot ja -sarjat

5.1 Pisteittäinen ja tasainen suppeneminen

Määritelmä 5.1.1. Olkoon $D \subseteq \mathbb{R}$ ja olkoon $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, jono funktioita. Jos raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

on olemassa jokaisessa pisteessä $x \in D$, niin funktiojonon (f_n) sanotaan *suppenevan pisteittäin* joukossa D. Funktiota

$$f\colon D \to \mathbb{R},\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

sanotaan jonon (f_n) *pisteittäiseksi raja-arvoksi* eli *rajafunktioksi* joukossa D.

Esimerkki 5.1.2. Olkoon $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Koska $f_n(0) = 0$ ja $f_n(1) = 1$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, niin

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1.$$

Jos $0 < x < 1$ ja $\varepsilon > 0$, niin

$$|f_n(x) - 0| = x^n < \varepsilon, \quad \text{kun } n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x},$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Huomaa: Vaikka jokainen f_n on jatkuva, niin rajafunktio f on epäjatkuva pisteessä $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1} f_n(x).$$

Rajankäyntien järjestystä ei siis saa vaihtaa.

Esimerkki 5.1.3. Olkoon $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Osoitetaan, että $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ kaikilla $x \in [0,1]$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Silloin

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{kun } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Nyt $f_n'(x) = x^{n-1}$ kaikilla $x \in [0,1]$ (päätepisteissä toispuoleiset derivaatat), joten edellisen esimerkin nojalla

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Huomaa: Vaikka jokainen f_n on derivoituva ja rajafunktio f on derivoituva, niin pisteessä $x = 1$

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 1 \neq 0 = \big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big)'.$$

Derivoinnin ja rajankäynnin järjestystä ei siis saa vaihtaa.

Esimerkki 5.1.4. Olkoon $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n = 2, 3, \ldots$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ -n^2(x - \frac{2}{n}), & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0, & \frac{2}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Osoita, että $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ kaikilla $x \in [0,1]$.

Ratkaisu: Jos $x = 0$, niin $f_n(x) = 0$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ ja siten $f(x) = 0$.

Olkoon $0 < x \leq 1$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin $f_n(x) = 0$, kun $x > \frac{2}{n}$. Siten

$$|f_n(x) - 0| = 0 < \varepsilon, \text{ kun } n > \tfrac{2}{x}.$$

Huomaa: Rajafunktio f ja kaikki funktiot f_n ovat jatkuvia ja siten Riemann-integroituvia välillä $[0,1]$, mutta rajafunktion integraali ei ole integraalien raja-arvo:

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integroinnin ja rajankäynnin järjestystä ei siis saa vaihtaa.

Funktiojonon pisteittäinen suppeneminen on liian heikkoa jatkuvuuden, derivoimisen ja integroimisen kannalta. Tähän tarvitaan vahvempi suppenemisen käsite.

Määritelmä 5.1.5. Olkoot $D \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ ja $f_n\colon A \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, jono funktioita. Jos

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty,$$

niin jonon (f_n) sanotaan *suppenevan joukossa D tasaisesti* kohti funktiota $f\colon A \to \mathbb{R}$.

Huomautus 5.1.6. Ellei joukkoa D erikseen mainita, niin $D = A$. Yleensä näin on. Ylläoleva määritelmä voidaan kirjoittaa myös seuraavassa muodossa: Jono (f_n) suppenee joukossa D tasaisesti kohti funktiota f, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen n_ε, että

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } x \in D \text{ ja } n \geq n_\varepsilon.$$

Tämä esitysmuoto poikkeaa pisteittäisen suppenemisen määritelmästä siinä suhteessa, että saman luvun n_ε täytyy kelvata jokaiselle $x \in D$.

Esimerkki 5.1.7. Olkoon $f_n\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$, $n = 1,2,\ldots$ Osoitetaan, että (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota $f(x) = 0$ joukossa $[0,2\pi]$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Silloin

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,2\pi]} \left|\frac{\sin(nx)}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

kun $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Siten $\sup\limits_{x\in[0,2\pi]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, kun $n \to \infty$, ja suppeneminen on tasaista.

Esimerkki 5.1.8. Olkoot $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n = 1,2,\ldots$ Nyt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Tällöin

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n, & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

Koska $\sup\limits_{0\le x<1} x^n = 1$ kaikilla $n = 1,2,\ldots$, niin myös

$$\sup_{0\le x\le 1} |f_n(x) - f(x)| = 1 \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Täten jono (f_n) ei suppene tasaisesti kohti funktiota f välillä $[0,1]$.

Tasainen suppeneminen voi riippua myös määritysjoukosta D. Tarkastellaan funktioita f_n joukossa $[0,\frac{1}{2}]$ eli olkoot $f_n\colon [0,\frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n = 1,2,\ldots$ Nyt $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ kaikilla $x \in [0,\frac{1}{2}]$ ja

$$\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} x^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon,$$

kun $n > \dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$. Siten $\sup\limits_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, kun $n \to \infty$, ja suppeneminen on tasaista välillä $[0,\frac{1}{2}]$.

Osoitetaan seuraavaksi, että jatkuvuus säilyy tasaisessa suppenemisessa.

Lause 5.1.9. *Jos funktiot $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia kaikilla $n = 1,2,\ldots$ ja jono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa D, niin rajafunktio f on jatkuva joukossa D.*

Todistus. Olkoot $x_0 \in D$ ja $\varepsilon > 0$. Osoitetaan, että olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } x \in D \text{ ja } |x - x_0| < \delta.$$

Jokaisella $x \in D$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$ on voimassa $|f_n(x) - f(x)| \le \sup\limits_{y\in D} |f_n(y) - f(y)|$. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\le 2\sup_{y\in D} |f_n(y) - f(y)| + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \end{aligned}$$

Koska suppeneminen on tasaista, voidaan valita sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\sup_{y\in D} |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{kaikilla } n \ge n_\varepsilon.$$

Tällöin erityisesti

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0)|.$$

Koska f_{n_ε} on jatkuva, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{kaikilla } x \in D \text{ ja } |x - x_0| < \delta.$$

Siten

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{kaikilla } x \in D \text{ ja } |x - x_0| < \delta.$$

□

Huomautus 5.1.10. Funktio f on jatkuva pisteessä x_0, jos ja vain jos $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Edellä osoitettiin siis, että

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x),$$

kun jono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f.

Esimerkki 5.1.11. Tarkastellaan funktiojonoa $f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Selvästi jokainen funktio f_n on jatkuva välillä $[0, 2]$. Lasketaan rajafunktio $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

Kun $x = 0$, niin $f_n(0) = 1$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, joten $f(0) = 1$. Kun $0 < x \leq 2$, niin $f(x) = \lim_{n \to \infty} e^{-nx^2} = 0$. Siis

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0, \\ 0, & \text{kun } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

Rajafunktio ei ole jatkuva, joten lauseen 5.1.9 nojalla suppeneminen ei ole tasaista välillä [0,2].

Funktiosarjat, kuten lukusarjatkin, määritellään osasummien jonojen avulla.

Määritelmä 5.1.12. Olkoon $f_k\colon D \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$, jono funktioita ja olkoon $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ Jos raja-arvo $\lim_{n \to \infty} S_n(x)$ on olemassa jokaisella $x \in D$, niin funktiosarjan $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ sanotaan *suppenevan pisteittäin* joukossa D. Funktiota

$$S\colon D \to \mathbb{R}, \quad S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$$

sanotaan sarjan *summafunktioksi* joukossa D. Jos osasummien jono (S_n) suppenee tasaisesti joukossa D, niin sarjan sanotaan *suppenevan tasaisesti* joukossa D. Summaa

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = S(x) - S_n(x)$$

sanotaan sarjan *(n:nneksi) jäännöstermiksi.*

Sarjan suppenemisen tarkastelussa riittää tarkastella jäännöstermiä, kuten seuraava lause osoittaa.

Lause 5.1.13. *Olkoot $f_k\colon D \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$ Tällöin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ suppenee tasaisesti joukossa D, jos ja vain jos jäännöstermien jono suppenee tasaisesti kohti nollafunktiota joukossa D. Vastaava väite pätee myös pisteittäisen suppenemisen tapauksessa.*

Todistus. Olkoon $S\colon D \to \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ sarjan summafunktio ja olkoot $S_n(x)$ vastaavat osasummat ja $R_n(x)$ vastaavat jäännöstermit. Koska

$$|S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| = |R_n(x) - 0| \quad \text{kaikilla } x \in D, \tag{5.1}$$

niin $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, jos ja vain jos $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ (vrt. huomautus 2.1.2 (2)). Täten pisteittäistä suppenemista koskeva väite pätee. Edelleen yhtälön (5.1) nojalla

$$\sup_{x\in D} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{x\in D} |R_n(x) - 0|,$$

mikä antaa tasaista suppenemista koskevan väitteen. □

Lause 5.1.14. *Olkoot funktiot $f_k\colon D \to \mathbb{R}$ jatkuvia joukossa D kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$. Jos $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ suppenee tasaisesti joukossa D, niin summafunktio $S(x)$ on jatkuva joukossa D.*

Todistus. Funktiot $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ ovat jatkuvia kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, ja jono (S_n) suppenee tasaisesti kohti summafunktiota S joukossa D. Lauseen 5.1.9 nojalla summafunktio S on jatkuva joukossa D. □

Lause 5.1.15 (Weierstrassin M-testi)**.** *Oletetaan, että funktioita $f_k\colon D \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$, kohti on olemassa sellaiset reaaliluvut $a_k \geq 0$, että*

$$|f_k(x)| \leq a_k \quad \textit{kaikilla } x \in D.$$

Jos lukusarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, niin funktiosarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ suppenee tasaisesti joukossa D.

Todistus. Koska $|f_k(x)| \leq a_k$ kaikilla $x \in D$, niin majoranttiperiaatteen nojalla sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ suppenee kaikilla $x \in D$. Siten sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ suppenee, koska se suppenee itseisesti. Toisaalta, koska

$$|R_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

kaikilla $x \in D$, niin

$$\sup_{x\in D} |R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0, \qquad \text{kun } n \to \infty,$$

sillä $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ on suppenevan sarjan jäännöstermi. Siten (R_n) suppenee tasaisesti kohti nollafunktiota, joten sarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ suppenee tasaisesti joukossa D. □

Esimerkki 5.1.16. Sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(kx)}{k^3x^3}$ suppenee tasaisesti joukossa $D = [2, 4]$:

Koska $2 \leq x \leq 4$, niin

$$\Big|\frac{\cos(kx)}{k^3x^3}\Big| \leq \frac{1}{k^3x^3} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{k^3}$$

(majorantin $\dfrac{1}{8k^3}$ tulee olla muuttujasta x riippumaton). Lauseen 2.1.14 nojalla sarja $\dfrac{1}{8}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^3}$ suppenee, joten Weierstrassin M-testin nojalla sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(kx)}{k^3x^3}$ suppenee tasaisesti välillä $[2, 4]$.

Erityisesti lauseen 5.1.14 nojalla summafunktio $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(kx)}{k^3x^3}$ on jatkuva välillä [2,4].

5.2 Jonon ja sarjan derivoiminen ja integroiminen

Tämän luvun alussa olleiden esimerkkien nojalla funktiojonon derivoinnin ja integroinnin järjestystä ei yleisesti saa vaihtaa rajankäynnin kanssa. Tässä kappaleessa tarkastellaan niitä lisäehtoja, joiden vallitessa tämä järjestyksen vaihtaminen on mahdollista.

Lause 5.2.1. *Jos* $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots,$ *ovat jatkuvia funktioita ja jono* (f_n) *suppenee tasaisesti välillä* $[a,b]$ *kohti rajafunktiota* f*, niin*

$$\int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \Big) \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}x.$$

Todistus. Lauseen 5.1.9 nojalla rajafunktio f on jatkuva välillä $[a,b]$. Lauseen 3.0.28 nojalla jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$ funktiot f, f_n ja $f_n - f$ ovat Riemann-integroituvia välillä $[a,b]$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska jono (f_n) suppenee tasaisesti välillä $[a,b]$, niin on olemassa sellainen n_ε, että

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{kaikilla } n \geq n_\varepsilon.$$

Siten jokaisella $x \in [a,b]$ on voimassa

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{kaikilla } n \geq n_\varepsilon.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\Big| \int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \Big| &= \Big| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) \,\mathrm{d}x \Big| \\
&\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \,\mathrm{d}x < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,
\end{aligned}$$

kun $n \geq n_\varepsilon$. Siten $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$. □

Lausetta 5.2.1 vastaava tulos pätee myös sarjoille.

Lause 5.2.2. *Jos* $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*,* $n = 1, 2, \dots,$ *ovat jatkuvia funktioita ja sarja* $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ *suppenee tasaisesti kohti summafunktiota* $S(x)$ *välillä* $[a,b]$*, niin* S *on integroituva välillä* $[a,b]$ *ja*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^\infty f_k(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^\infty \int_a^b f_k(x) \,\mathrm{d}x.$$

Todistus. Olkoon $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$. Koska jono (S_n) suppenee tasaisesti kohti summafunktiota $S(x) = \sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ välillä $[a,b]$, niin lauseen 5.1.14 nojalla S on jatkuva välillä $[a,b]$. Lisäksi lauseen 3.0.28 nojalla S, S_n ja f_k ovat Riemann-integroituvia välillä $[a,b]$. Siten lauseen 5.2.1 nojalla

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) \,\mathrm{d}x.$$

□

Esimerkki 5.2.3. Laske summa $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$.

Ratkaisu: Olkoon $h(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$, kun $|x| < 1$. Olkoon lisäksi $\frac{1}{2} < c < 1$. Kun $x \in [-c, c]$, niin $|x|^k \leq c^k$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$. Sarja $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$ suppenee, joten Weierstrassin M-testin nojalla sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ suppenee tasaisesti välillä $[-c, c]$; erityisesti välillä $[0, \frac{1}{2}] \subseteq [-c, c]$. Lauseen 5.2.2 nojalla

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \Big/_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k+1} x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}.\end{aligned}$$

Suoraan laskemalla saadaan

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \Big/_0^{\frac{1}{2}} -\ln(1-x) = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

Siten $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k2^k} = \ln 2$.

Lause 5.2.4. *Oletetaan, että jono (f_n) jatkuvasti derivoituvia funktioita $f_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ suppenee pisteittäin kohti rajafunktiota $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Jos derivaattajono (f_n') suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$, niin f on derivoituva ja*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad \text{kaikilla } x \in [a, b].$$

Todistus. Lauseen 5.1.9 nojalla rajafunktio $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ on jatkuva ja siten integroituva. Lauseesta 5.2.1 seuraa, että

$$\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$$

kaikilla $x \in [a, b]$. Analyysin peruslauseen osan II (lause 3.2.7) nojalla

$$\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = f_n(x) - f_n(a)$$

kaikilla $x \in [a, b]$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$. Tästä seuraa, että

$$\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a).$$

Analyysin peruslauseen osan I (lause 3.2.4) nojalla

$$f'(x) = g(x) \quad \text{kaikilla } x \in [a, b],$$

toisin sanoen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_k(x).$$

□

Vastaavasti funktiosarjan derivoinnille on voimassa seuraava lause.

Lause 5.2.5. *Oletetaan, että funktiot* $f_k\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *ovat jatkuvasti derivoituvia kaikilla* $k \in \mathbb{Z}_+$ *ja että sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *suppenee pisteittäin kohti summafunktiota* S *välillä* $[a,b]$*. Jos sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ *suppenee tasaisesti välillä* $[a,b]$*, niin summafunktio* S *on derivoituva ja*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_k(x) \quad \textit{kaikilla } x \in [a,b].$$

Todistus. Olkoon $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, jolloin $S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$. Oletusten nojalla funktiot S_n ovat jatkuvasti derivoituvia välillä $[a,b]$ ja jono (S_n) suppenee kohti summafunktiota S välillä $[a,b]$. Lisäksi jono (S_n') suppenee tasaisesti välillä $[a,b]$, joten lauseen 5.2.4 nojalla S on derivoituva ja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_k(x).$$

□

Esimerkki 5.2.6. Osoita, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad \text{kun } |x| < 1.$$

Ratkaisu: Olkoot $f_k\colon\ ]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f_k(x) = x^k$, $k = 1,2,\ldots$ Tällöin

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x} \quad \text{kaikilla } |x| < 1.$$

Valitaan sellainen $0 < c < 1$, että $x \in [-c,c]$. Nyt $f_k'(x) = kx^{k-1}$ ja $|f_k'(x)| \le kc^{k-1}$. Koska $\dfrac{(k+1)c^k}{kc^{k-1}} \to c < 1$, kun $k \to \infty$, niin sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kc^{k-1}$ suppenee suhdetestin (seuraus 2.2.13) nojalla. Weierstrassin M-testin nojalla sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$ suppenee tasaisesti välillä $[-c,c]$. Lauseen 5.2.5 perusteella

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_k(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=1}^{\infty} x^k \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{x}{1-x}\Big) = \frac{1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

kaikilla $x \in [-c,c]$. Kun $|x| < 1$ on annettu (kiinteä) luku, voidaan valita sellainen c, että $|x| < c < 1$, joten yllä oleva kaava $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ pätee kaikilla $|x| < 1$.

Luku 6

Potenssisarjat

6.1 Potenssisarjan suppeneminen

Määritelmä 6.1.1. Funktiosarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad x \in \mathbb{R},$$

missä kertoimet $a_k \in \mathbb{R}$ ja $x_0 \in \mathbb{R}$, kutsutaan *potenssisarjaksi.* Lukua $x_0 \in \mathbb{R}$ sanotaan kyseisen sarjan *keskukseksi.* Tässä asetetaan $(x - x_0)^0 = 1$ myös, kun $x = x_0$.

Huomautus 6.1.2. (1) Koska potenssisarjan osasummat ovat polynomeja, potenssisarja voidaankin intuitiivisesti ajatella "äärettönasteisena" polynomina.

(2) Jos $x_0 = 0$, niin potenssisarja on

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Usein tutkitaan vain tätä tapausta, sillä yleinen tapaus voidaan palauttaa tähän.

(3) Potenssisarjan suppeneminen riippuu pisteestä x. Kun $x = x_0$, niin potenssisarja on

$$a_0 + 0 + 0 + \cdots,$$

joten jokainen potenssisarja suppenee ainakin yhdessä pisteessä.

Esimerkki 6.1.3. (1) Geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ on potenssisarja, jonka summafunktio on

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \text{kun } |x| < 1.$$

Kun $|x| \geq 1$, niin sarja hajaantuu. Sarja on funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

potenssisarjaesitys, kun $|x| < 1$. Huomaa, että funktio on määritelty kaikilla $x \neq 1$, mutta sarjaesitys pätee vain, kun $|x| < 1$.

(2) Sarja
$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^kx^k=x+4x^2+27x^3+\cdots$$
suppenee, kun $x=0$. Kun $x\neq 0$, niin $S(x)$ hajaantuu, sillä k^kx^k ei suppene nollaa kohti. Täten sarja $S(x)$ suppenee vain yhdessä pisteessä.

(3) Millä luvun $x\in\mathbb{R}$ arvoilla sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^k}$ suppenee?

Ratkaisu: Koska
$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k^k}\right|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{|x|^k}{k^k}}=|x|\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0,$$
niin juuritestin (seuraus 2.2.18) nojalla sarja suppenee itseisesti kaikilla $x\in\mathbb{R}$.

(4) Millä $x\in\mathbb{R}$ sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$ suppenee?

Ratkaisu: Koska $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}=1$, niin
$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k}\right|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|x|}{\sqrt[k]{k}}=|x|$$
ja juuritestin (seuraus 2.2.18) nojalla sarja suppenee itseisesti, kun $|x|<1$. Kun $|x|>1$, niin sarja hajaantuu, sillä $\frac{x^k}{k}$ ei suppene nollaa kohti, kun $k\to\infty$.

Kun $x=-1$, saadaan vuorotteleva harmoninen sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}$, joka suppenee Leibnizin lauseen nojalla. Kun $x=1$, saadaan harmoninen sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$, joka hajaantuu.

Siten sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{k}$ suppenee, jos ja vain jos $-1\le x<1$.

(5) Millä arvoilla $x\in\mathbb{R}$ sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}$ suppenee.

Ratkaisu: Koska
$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k^2}\right|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|x|^k}{(\sqrt[k]{k})^2}=|x|,$$
niin juuritestin (seuraus 2.2.18) nojalla sarja suppenee itseisesti, kun $|x|<1$. Kun $|x|>1$, niin sarja hajaantuu, sillä $\frac{x^k}{k^2}$ ei suppene nollaa kohti, kun $k\to\infty$.

Kun $x=-1$, saadaan sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}$, joka suppenee Leibnizin lauseen 2.4.3 nojalla. Kun $x=1$, saadaan sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$, joka suppenee lauseen 2.1.14 nojalla. Arvot $x=\pm1$ saa käsiteltyä myös samalla kertaa, sillä tällöin $\left|\frac{x^k}{k^2}\right|=\frac{1}{k^2}$ ja sarja suppenee itseisesti.

Siten sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{k^2}$ suppenee, jos ja vain jos $-1\le x\le 1$.

Lause 6.1.4 (Abelin lause)**.** *Jos potenssisarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

suppenee pisteessä $x = x_1 \neq x_0$, niin se suppenee itseisesti jokaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}$, jolle

$$|x-x_0| < |x_1 - x_0|.$$

Erityisesti sarja suppenee näissä pisteissä x.

Todistus. Koska $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x_1-x_0)^k$ suppenee, niin lemman 2.1.4 nojalla

$$\lim_{k\to\infty} a_k(x_1-x_0)^k = 0.$$

Lemman B.1.10 nojalla on olemassa sellainen $M \in \mathbb{R}$, että

$$|a_k(x_1-x_0)^k| \leq M \iff |a_k| \leq \frac{M}{|x_1-x_0|^k}$$

kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots$

Olkoon $x \in \mathbb{R}$ sellainen piste, että $|x-x_0| < |x_1-x_0|$. Silloin

$$|a_k(x-x_0)^k| \leq \frac{M}{|x_1-x_0|^k}|x-x_0|^k = M\Big(\frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|}\Big)^k$$

kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots$ Koska $\dfrac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|} < 1$, niin geometrinen sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|}\Big)^k$$

suppenee ja majoranttiperiaatteen (lause 2.2.4) nojalla $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k(x-x_0)^k|$ suppenee. □

Seuraus 6.1.5. *Jos potenssisarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

ei suppene itseisesti pisteessä $x = x_1$, niin se hajaantuu jokaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}$, jolle

$$|x-x_0| > |x_1-x_0|.$$

Todistus. Tehdään vastaoletus: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ suppenee pisteessä x, missä $|x-x_0| > |x_1-x_0|$. Silloin Abelin lauseen nojalla $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_1-x_0)^k$ suppenee itseisesti, mikä on ristiriita. □

Määritelmä 6.1.6. Potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

suppenemissäteeksi sanotaan lukua

$$R = \sup\Big\{|x-x_0| \;\Big|\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \text{ suppenee}\Big\}.$$

Tässä käytetään tulkintaa, että supremum on ∞, jos joukko ei ole ylhäältä rajoitettu. Jos $R > 0$, niin väliä $]x_0 - R, x_0 + R[$ sanotaan sarjan *suppenemisväliksi*.

Seuraava lause osoittaa, että suppenemissäteen määritelmä on järkevä.

Lause 6.1.7. *Olkoon R sarjan*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

suppenemissäde.

(i) Jos $R=0$, niin sarja suppenee vain, kun $x=x_0$.

(ii) Jos $R=\infty$, niin sarja suppenee itseisesti kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Jos $0<R<\infty$, niin sarja suppenee itseisesti, kun $|x-x_0|<R$ ja hajaantuu, kun $|x-x_0|>R$.

Todistus. (i) Tehdään vastaoletus: sarja suppenee pisteessä $x_1 \neq x_0$. Silloin

$$R=\sup\Big\{|x-x_0| \;\Big|\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \text{ suppenee}\Big\} \geq |x_1-x_0|>0,$$

mikä on ristiriita.

(ii) Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Koska $R=\infty$, niin joukko

$$A=\Big\{y \in \mathbb{R} \;\Big|\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k(y-x_0)^k \text{ suppenee}\Big\}$$

ei ole rajoitettu. Täten on olemassa sellainen $x_1 \in A$, että $|x-x_0|<|x_1-x_0|$. Koska $x_1 \in A$, niin $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_1-x_0)^k$ suppenee, joten Abelin lauseen nojalla

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

suppenee itseisesti.

(iii) Jos $|x-x_0|<R$, niin luvun R määritelmän nojalla on olemassa sellainen $x_1 \in \mathbb{R}$, että $|x-x_0|<|x_1-x_0|<R$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_1-x_0)^k$ suppenee. Abelin lauseen nojalla

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

suppenee itseisesti.

Jos $|x-x_0|>R$, niin luvun R määritelmän nojalla $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ hajaantuu.

□

Huomautus 6.1.8. Kun $|x-x_0|=R$, niin sarja voi supeta tai hajaantua. Tämä vaatii aina tapauskohtaisen tarkastelun, minkä nojalla potenssisarjan suppenemisalue on jokin väleistä $[-R,R]$, $]-R,R[$, $[-R,R[$ tai $]-R,R]$.

Suppenemissäde voidaan usein laskea helposti suhdetestin (lause 2.2.12 ja seuraus 2.2.13) tai juuritestin (lause 2.2.17 ja seuraus 2.2.18) avulla, kuten seuraava lause osoittaa.

Lause 6.1.9. *Oletetaan, että $a_k \neq 0$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots$ Jos jompikumpi raja-arvoista*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

on olemassa, niin tämä raja-arvo on potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

suppenemissäde.

Todistus. Tarkastellaan ensin juuren raja-arvoa. Oletusten nojalla

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k(x-x_0)^k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x-x_0|}{\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}} = \begin{cases} \frac{|x-x_0|}{R}, & 0 < R < \infty, \\ 0, & R = \infty, \\ \infty, & R = 0,\ x \neq x_0. \end{cases}$$

Jos $0 < R < \infty$, niin juuritestin (seuraus 2.2.18) nojalla sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k (x - x_0)^k|$$

suppenee, kun $\frac{1}{R}|x - x_0| < 1$, ja hajaantuu, kun $\frac{1}{R}|x - x_0| > 1$.

Täten sarja suppenee itseisesti, kun $|x - x_0| < R$. Jos $|x - x_0| > R$, niin $R < |x_1 - x_0| < |x - x_0|$ jollakin $x_1 \in \mathbb{R}$. Ylläolevan mukaan sarja ei suppene itseisesti pisteessä x_1, joten seurauksen 6.1.5 nojalla se hajaantuu pisteessä x. Sarja siis hajaantuu kaikilla $|x - x_0| > R$. Suppenemissäde on näin ollen R.

Olkoon $R = \infty$ ja $x \in \mathbb{R}$. Tällöin on olemassa sellainen k_0, että

$$\sqrt[k]{|a_k(x-x_0)^k|} < \frac{1}{2} \quad \text{kaikilla } k \geq k_0,$$

joten sarja suppenee itseisesti juuritestin (lause 2.2.17) nojalla, ja suppenemissäde on ∞.

Olkoon $R = 0$ ja $x \neq x_0$. Tällöin on olemassa sellainen k_0, että

$$\sqrt[k]{|a_k(x-x_0)^k|} \geq 1 \quad \text{kaikilla } k \geq k_0.$$

Lauseen 2.2.17 nojalla sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

ei suppene itseisesti, ja seurauksen 6.1.5 nojalla suppenemissäde on 0.

Osamäärälle pätee vastaavasti

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{a_k(x-x_0)^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{|x-x_0|}{\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|} = \begin{cases} \frac{|x-x_0|}{R}, & 0 < R < \infty, \\ 0, & R = \infty, \\ \infty, & R = 0,\ x \neq x_0. \end{cases}$$

Todistuksen loppuosa menee vastaavasti kuin juuren tapauksessa, nyt vain sovelletaan suhdetestiä (lause 2.2.12 ja seuraus 2.2.13). □

Huomautus 6.1.10. Lauseen 6.1.9 raja-arvot eivät aina ole olemassa, mutta yleisesti suppenemissäde voidaan määritellä asettamalla

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \in [0, \infty] \quad \text{(Cauchy–Hadamard).}$$

Tämä on aina olemassa!

Esimerkki 6.1.11. (1) Geometrinen sarja $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ suppenee, jos ja vain jos $|x| < 1$. Nyt $a_k = 1$ kaikilla k, joten suppenemissäde on 1.

(2) Sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k}(x-0)^k$$

kertoimet ovat $a_k = \frac{1}{k^k}$ kaikilla k (sopimus: $0^0 = 1$), joten

$$\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{k^k}}} = k \to \infty, \quad \text{kun } k \to \infty.$$

Suppenemissäde on siten ∞, ja sarja suppenee itseisesti kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

(3) Sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$$

kertoimet ovat $a_k = k!$ kaikilla k (sopimus: $0! = 1$), joten

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{1}{k+1} \to 0, \quad \text{kun } k \to \infty.$$

Suppenemissäde on 0 ja sarja hajaantuu kun $x \neq 0$.

(4) Potenssisarja $2 + x + 2x^2 + x^3 + 2x^4 + \cdots$ on muotoa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

missä

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{kun } k \text{ on pariton,} \\ 2, & \text{kun } k \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

Nyt

$$1 \leq \sqrt[k]{|a_k|} \leq \sqrt[k]{2} \quad \text{kaikilla } k = 1, 2, \ldots,$$

joten $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$, ja suppenemissäde on 1. Huomaa, että lauseen 6.1.9 osamäärätulos ei nyt toimi, sillä

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \begin{cases} 2, & \text{kun } k \text{ on parillinen,} \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } k \text{ on pariton,} \end{cases}$$

joten raja-arvoa $\lim\limits_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ ei ole olemassa.

6.2 Potenssisarjan summafunktion ominaisuuksia

Olkoon $R > 0$ potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

suppenemissäde. Tässä luvussa tarkastellaan potenssisarjan summafunktion

$$f\colon\ ]x_0 - R, x_0 + R[\ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

ominaisuuksia.

Lause 6.2.1. *Potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ suppenee tasaisesti jokaisella välillä $[x_0 - r, x_0 + r]$, missä $0 < r < R$. Sarjan määrittelemä funktio f on jatkuva välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$.*

Todistus. Jos $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, niin

$$|a_k(x - x_0)^k| = |a_k||x - x_0|^k \leq |a_k|r^k.$$

Koska $x_0 + r \in\ ]x_0 - R, x_0 + R[$, niin sarja suppenee itseisesti, kun $x = x_0 + r$. Tällöin $a_k(x - x_0)^k = a_k r^k$, joten

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|r^k$$

suppenee. Weierstrassin M-testin (lause 5.1.15) nojalla sarja $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ suppenee tasaisesti välillä $[x_0 - r, x_0 + r]$. Funktion f jatkuvuus seuraa lauseesta 5.1.14. □

Kun potenssisarja derivoidaan termeittäin, saadaan potenssisarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x - x_0)^{k-1}.$$

Tutkitaan seuraavaksi tämän sarjan ominaisuuksia.

Lause 6.2.2. *Termeittäin derivoidun sarjan suppenemissäde on sama kuin alkuperäisen sarjan.*

Todistus. Olkoon R alkuperäisen sarjan suppenemissäde ja R' termeittäin derivoidun sarjan suppenemissäde.

Osoitetaan ensin, että $R' \leq R$. Jos $R' = 0$, niin väite on selvä. Oletetaan, että $R' > 0$. Jos $x_1 \in\ ]x_0 - R', x_0 + R'[$, niin

$$\sum_{k=1}^{\infty} |ka_k(x_1 - x_0)^{k-1}|$$

suppenee. Koska

$$|a_k(x_1 - x_0)^k| \leq k|a_k(x_1 - x_0)^k| = |x_1 - x_0||ka_k(x_1 - x_0)^{k-1}|$$

kaikilla $k = 1, 2, \ldots$, niin majoranttiperiaatteen nojalla myös

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x_1 - x_0)^k|$$

suppenee. Siten sarja suppenee itseisesti kaikilla $x_1 \in \,]x_0 - R', x_0 + R'[$, joten $R \geq R'$.

Osoitetaan vielä, että $R \leq R'$. Jos $R = 0$, niin väite on selvä. Oletetaan siis, että $R > 0$. Jos $x_1 \in \,]x_0 - R, x_0 + R[$, niin valitaan sellainen r, että $|x_1 - x_0| < r < R$. Sarja suppenee, pisteessä $x = x_0 + r$, joten

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$$

suppenee. Siten on olemassa sellainen M, että

$$|a_k| r^k \leq M \quad \text{kaikilla } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Tällöin

$$|ka_k(x_1 - x_0)^{k-1}| \leq \frac{M}{r} k \Big(\frac{|x_1 - x_0|}{r}\Big)^{k-1} \qquad \text{kaikilla } k = 1, 2, \ldots$$

Sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \Big(\frac{|x_1 - x_0|}{r}\Big)^{k-1}$$

suppenee, sillä sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$ suppenemissäde on 1 (ks. lause 6.1.9 tai esimerkki 5.2.6) ja $\frac{|x_1 - x_0|}{r} < 1$. Majoranttiperiaatteen nojalla myös

$$\sum_{k=1}^{\infty} |ka_k(x_1 - x_0)^{k-1}|$$

suppenee kaikilla $x_1 \in \,]x_0 - R, x_0 + R[$, joten $R' \geq R$. □

Jos potenssisarja integroidaan termeittäin, niin saadaan potenssisarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k}(x - x_0)^k,$$

sillä

$$\int_{x_0}^{x} a_k(t - x_0)^k \, \mathrm{d}t = a_k \Big/_{x_0}^{x} \frac{(t - x_0)^{k+1}}{k+1} = \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}.$$

Kun integroitu sarja derivoidaan termeittäin, niin saadaan alkuperäinen sarja, joten lauseen 6.2.2 nojalla integroidun sarjan suppenemissäde on sama kuin alkuperäisen.

Lause 6.2.3. *Jos*

$$f\colon \,]x_0 - R, x_0 + R[\,\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k,$$

missä $R > 0$ on potenssisarjan suppenemissäde, niin funktio f on derivoituva välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$ ja se voidaan derivoida termeittäin eli

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x - x_0)^{k-1}.$$

Lisäksi se voidaan integroida termeittäin eli

$$\int_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}.$$

Kaikilla näillä potenssisarjoilla on sama suppenemissäde R.

Todistus. Suppenemissäteitä koskevat väitteet seuraavat lauseesta 6.2.2 ja väitettä edeltävästä huomiosta.

Olkoon summia koskevia väitteitä varten $x \in \left]x_0 - R, x_0 + R\right[$. Valitaan sellainen r, että $|x - x_0| < r < R$. Lauseen 6.2.1 nojalla sarjat suppenevat tasaisesti välillä $[x_0 - r, x_0 + r]$. Ensimmäinen väite seuraa lauseesta 5.2.5 ja toinen lauseesta 5.2.2. □

Huomautus 6.2.4. Edellisen lauseen nojalla potenssisarjoja voidaan siis derivoida ja integroida kuten polynomeja. Lauseen 6.2.3 tulos pätee myös määräämättömälle integraalille (antiderivaatalle):

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1},$$

missä C on integroimisvakio.

Esimerkki 6.2.5. Olkoon $f\colon \left]-1,1\right[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Geometrisen sarjan summakaavan nojalla (suhdelukuna $-x$)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k.$$

Nyt kaikilla $|x| < 1$ on voimassa

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x t^k\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\end{aligned}$$

Koska $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+x)$, niin saadaan uusi potenssisarjaesitys

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \qquad |x| < 1.$$

Sijoittamalla ylläolevaan sarjaan $x = -1$ saadaan harmoninen sarja, joka hajaantuu. Vastaavasti $x = 1$ antaa alternoivan harmonisen sarjan, joka suppenee. Osoitetaan, että ylläoleva summa pätee myös, kun $x = 1$ eli että alternoivan harmonisen sarjan summa on $\ln(1+1) = \ln 2$. Jokaisella $n = 2, 3, \dots$ pätee

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k + \frac{(-t)^n}{1+t}.$$

Tässä oikealla puolella olevassa summassa on äärellinen määrä termejä, joten integroimalla välin $[0, x]$ yli saadaan jokaisella $x > -1$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Täten

$$\Big|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} - \ln(1+x)\Big| = \Big|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\Big|.$$

Osoitetaan, että kun $x = 1$, tässä esiintyvän integraalin raja-arvo on 0, kun $n \to \infty$ (vastaava päättely pätee muillekin $x \in]-1, 1]$). Integraalissa $1 + t \geq 1$ ja saadaan

$$\Big|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\Big| \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Täten sarja suppenee myös pisteessä $x = 1$, ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(1+1) = \ln 2.$$

Seuraus 6.2.6. *Lauseen 6.2.3 tilanteessa funktio f on mielivaltaisen monta kertaa jatkuvasti derivoituva välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$ ja*

$$f^{(n)}(x_0) = n! a_n \quad \textit{kaikilla } n = 1, 2, \ldots$$

Todistus. Lauseen 6.2.3 nojalla

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} \quad \text{kaikilla } |x - x_0| < R,$$
$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2} \quad \text{kaikilla } |x - x_0| < R.$$

Induktiolla saadaan, että kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k (x - x_0)^{k-n},$$

kun $|x - x_0| < R$. Sijoittamalla $x = x_0$ saadaan

$$f^{(n)}(x_0) = n(n-1)\cdots 1 \cdot a_n = n! a_n.$$

□

Seuraus 6.2.7. *Jos potenssisarjat*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \textit{ja} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

suppenevat ja esittävät samaa funktiota jossain pisteen x_0 ympäristössä, niin $a_k = b_k$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots$

Todistus. Oletusten mukaan on olemassa sellainen $r > 0$, että $f(x) = g(x)$, kun $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$. Tällöin $f'(x) = g'(x)$ kaikilla $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ ja erityisesti $f'(x_0) = g'(x_0)$. Vastaavasti nähdään, että $f''(x) = g''(x)$ kaikilla $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ ja erityisesti $f''(x_0) = g''(x_0)$. Induktiolla nähdään, että $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$ kaikilla $n = 0, 1, 2, \ldots$ ja siten

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} = b_n \quad \text{kaikilla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

□

Edellisen lauseen nojalla potenssisarja $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$ voidaan (suppemisvälillään) esittää muodossa

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Tätä esitystä kutsutaan funktion f *Taylorin sarjaksi pisteessä* x_0.

Esimerkki 6.2.8. Olkoon $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, kun $x\in\,]-1,1[$. Laske $f^{(100)}(0)$.

Ratkaisu: Geometrisen sarjan summakaavan nojalla (suhdelukuna $-x^2$)

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^{2k}\\&=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^kx^{2k}+\dots\end{aligned}$$

Funktion f 100. derivaatta pisteessä 0 on $f^{(100)}(0)=100!a_{100}=100!(-1)^{50}=100!$.

Huomaa: Funktio f on määritelty koko reaaliakselilla, mutta sarjaesitys pätee vain välillä $]-1,1[$. Funktiolla f ei voi olla potenssisarjaesitystä koko reaaliakselilla, sillä sen pitäisi olla sama sarja välillä $]-1,1[$ ja seurauksen 6.2.7 ja ylläolevan nojalla sarjan pitäisi olla $\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k$ koko reaaliakselilla. Tämä on mahdotonta, sillä sarja hajaantuu, kun $|x|\geq 1$.

Lisäksi integroimalla sarja välin $[0,x]$, $|x|<1$, yli saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t&=\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kt^{2k}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^x t^{2k}\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots\end{aligned}$$

Toisaalta $\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\overline{\text{arc}}\tan x$, joten saadaan Taylorin sarja

$$\overline{\text{arc}}\tan x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots,\qquad |x|<1.$$

Kun $x=\pm1$, saadaan sarja $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^kx}{2k+1}$, joka suppenee Leibnizin lauseen nojalla. Kuten funktion $\ln(1+x)$ tapauksessa, pisteissä $x=\pm1$ saadaan

$$\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^kx}{2k+1}-\overline{\text{arc}}\tan x\Big|=\Big|\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\Big|\leq\int_0^x|t|^{2n}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2n+1}\to 0,$$

kun $n\to\infty$. Siten sarja suppenee myös pisteessä $x=\pm1$, ja

$$\overline{\text{arc}}\tan x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\quad\text{kaikilla } -1\leq x\leq 1;$$

erityisesti

$$\frac{\pi}{4}=\overline{\text{arc}}\tan 1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Esimerkki 6.2.9. Olkoon $f\colon\ ]-1,1[\ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Geometrisen sarjan summakaavan nojalla (suhdelukuna x)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

joten lauseen 6.2.3 mukaan kaikilla $|x| < 1$ pätee

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} &= f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \frac{1}{(1-x)^2},\\
\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} &= f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{(1-x)^2}\Big) = \frac{2}{(1-x)^3},\\
\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)x^{k-3} &= f'''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{2}{(1-x)^3}\Big) = \frac{6}{(1-x)^4}.
\end{aligned}$$

Induktiolla nähdään, että yleisesti

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} x^k = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Esimerkki 6.2.10. Olkoon $f(x) = \ln(1+x^2)$, $x \in\ ]-1,1[$. Laske $f^{(2010)}(0)$.

Ratkaisu: Esimerkin 6.2.5 perusteella

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \quad \text{kun } |x| < 1.$$

Tällöin kaikilla $|x| < 1$ on voimassa

$$\begin{aligned}
f(x) = \ln(1+x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{2k+2} = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \dots\\
&= 0 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 + 0\cdot x^3 + (-\frac{1}{2})\cdot x^4 + \dots
\end{aligned}$$

Seurauksen 6.2.6 nojalla

$$f^{(2010)}(0) = 2010!\, a_{2010},$$

missä a_{2010} on termin x^{2010} kerroin. Jos $2k+2 = 2010$, niin $k = 1004$. Siten $a_{2010} = \dfrac{(-1)^{1004}}{1004+1} = \dfrac{1}{1005}$ ja $f^{(2010)}(0) = -\dfrac{2010!}{1005}$.

Esimerkki 6.2.11. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Sarjan suppenemissäde on ∞ ja se suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$ (harjoitustehtävä). Nyt

$$f'(x) = D\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x).$$

Itse asiassa $f(x) = e^x$ (ks. harjoitukset; tämä voidaan ottaa eksponenttifunktion määritelmäksi). Koska tehtävän sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin lemman 2.1.4 nojalla $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x^k}{k!} = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Jos annettu funktio f on äärettömän monta kertaa derivoituva jossakin pisteen x_0 ympäristössä, niin voidaan muodostaa sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{6.1}$$

ja tutkia, milloin sarja (6.1) suppenee ja, jos sarja (6.1) suppenee, niin onko $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Taylorin lauseen todistuksessa tarvitaan seuraavaa aputulosta. Sitä ei todisteta tällä kurssilla.

Lemma 6.2.12 (Integraalilaskennan väliarvolause)**.** *Jos funktio* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on jatkuva ja funktio* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on Riemann-integroituva sekä* $g(x) \geq 0$ *kaikilla* $x \in [a,b]$ *(tai* $g(x) \leq 0$ *kaikilla* $x \in [a,b]$*), niin on olemassa sellainen* $\zeta \in \,]a,b[$*, että*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\zeta)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lause 6.2.13 (Taylorin lause)**.** *Jos* f *on (vähintään)* $n+1$ *kertaa jatkuvasti derivoituva välillä* $]x_0-R, x_0+R[$, $R>0$, *niin*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x),$$

missä

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

ja $\zeta \in \,]x_0, x[$ *(tai* $\zeta \in \,]x, x_0[$*).*

Todistus. Osoitetaan ensin induktiolla luvun n suhteen, että funktion f esitys pätee jäännöstermillä

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t. \tag{6.2}$$

Kun $n=0$, niin analyysin peruslauseen osan II (lause 3.2.7) nojalla

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Oletetaan sitten, että (6.2) pätee jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$. Osittaisintegroimalla (lause 3.2.12) saadaan

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n!}\Big(\Big/_{x_0}^{x} -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t\Big) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + R_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Täten (6.2) pätee kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Oletetaan, että $x > x_0$. Silloin integraalilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen $\zeta \in \,]x_0, x[$, että

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t &= f^{(n+1)}(\zeta)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= f^{(n+1)}(\zeta)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}$$

Tapaus $x < x_0$ saadaan vastaavasti. $\square$

Esimerkki 6.2.14. Olkoon $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Geometrisen sarjan summakaavan nojalla (suhdelukuna x)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} = S_n(x) + R_n(x),$$

missä

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{ja} \quad R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Jos $|x| < 1$, niin $R_n(x) \to 0$, kun $n \to \infty$. Jos $|x| \geq 1$, niin $R_n(x)$ ei suppene kohti lukua nolla, kun $n \to \infty$.

Seuraus 6.2.15. *Jos funktio f on äärettömän monta kertaa derivoituva välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$, niin sillä on potenssisarjaesitys tällä välillä, jos ja vain jos*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \textit{kaikilla } x \in]x_0 - R, x_0 + R[.$$

Todistus. "$\Leftarrow$": Jos $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, niin lauseen 6.2.13 nojalla

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

"$\Rightarrow$": Jos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

niin seurauksen 6.2.6 nojalla

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Koska sarja suppenee, niin lauseen 6.2.13 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Big(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \Big) = 0.$$

□

Esimerkki 6.2.16. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Koska $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$, niin Taylorin lauseen nojalla

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x),$$

missä

$$R_n(x) = \frac{e^\zeta}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < |\zeta| < |x|.$$

Tästä saadaan arvio

$$0 \leq |R_n(x)| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Koska $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y^n}{n!} = 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$, niin

$$\lim_{n\to\infty} e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

ja siten myös $|R_n(x)| \to 0$, kun $n \to \infty$. Seurauksen 6.2.15 perusteella

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Keskukseksi voidaan valita myös muu piste x_0 kuin 0:

$$e^x = e^{x_0} e^{x - x_0} = e^{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x - x_0)^k.$$

Lisäksi kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on voimassa esimerkiksi

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots$$

ja edelleen (huomaa, että $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{x^2}) = 2xe^{x^2}$)

$$2xe^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k+1}}{k!} = 2x + 2x^3 + x^5 + \frac{x^7}{3} + \cdots$$

Esimerkki 6.2.17. Kaikkia mielivaltaisen monta kertaa derivoituvia funktioita ei kuitenkaan voida esittää potenssisarjana.

Osoitetaan, että funktiota

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

ei voida esittää potenssisarjana keskuksen $x_0 = 0$ ympäristössä. Jos $x < 0$, niin $f'(x) = 0$. Jos $x > 0$, niin

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

Pisteessä $x = 0$ toispuoleisille derivaatoille pätee

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{0}{x} = 0$$

ja

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^t} = 0,$$

joten

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Vastaavasti

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{x} = 0,$$

sillä $\displaystyle\lim_{x \to 0-} \frac{f'(x)}{x} = 0$ ja

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} = \lim_{t \to \infty} \frac{t^3}{e^t} = 0.$$

Induktiolla voidaan osoittaa, että $f^{(n)}(0) = 0$ kaikilla $n = 1, 2, \dots$ Jos nyt olisi $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, niin

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{kaikilla } k = 0, 1, \dots$$

Tällöin olisi $f(x) = 0$ jossakin pisteen 0 ympäristössä, mikä on ristiriita.

Funktiota, joka voidaan esittää potenssisarjana jokaisen pisteen ympäristössä, sanotaan *analyyttiseksi*. Edellisen esimerkin funktio ei ole analyyttinen, mutta esimerkiksi funktiot e^x, $\sin x$ ja $\cos x$ ovat analyyttisiä.

Esimerkki 6.2.18. Hajaantuvia (potenssi)sarjoja voidaan käyttää joissakin tapauksissa likiarvojen laskemiseen. Oletetaan, että sarja $T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hajaantuu jokaisella $x \neq 0$ ja että $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Vaikka $T_n(x)$ hajaantuu, kun $x \neq 0$, niin saattaa löytyä sellainen $n_x \in \mathbb{Z}$, että virhetermi $R_{n_x}(x)$ on pieni. Tällöin saadaan tarkka likiarvo $f(x) \approx T_n(x)$. Olkoon esimerkiksi $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t$, missä $x > 0$. Tämä suppenee majoranttiperiaatteen nojalla (majoranttina xe^{-t}). Toistuvalla osittaisintegoinnilla (integroidaan funktiota e^{-t} ja derivoidaan funkiota t^{-k}) ja induktiolla saadaan

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{c\to\infty} \Big/_{\frac{1}{x}}^{c} -\frac{e^{-t}}{t} - \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} (-\tfrac{1}{t^2})(-e^{-t}) \,\mathrm{d}t = xe^{-\frac{1}{x}} - \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \,\mathrm{d}t \\
&= xe^{-\frac{1}{x}} - \lim_{c\to\infty} \Big/_{\frac{1}{x}}^{c} -\frac{e^{-t}}{t^2} + \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} (-\tfrac{2}{t^3})(-e^{-t}) \,\mathrm{d}t \\
&= xe^{-\frac{1}{x}} - x^2 e^{-\frac{1}{x}} + 2\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3} \,\mathrm{d}t \\
&= \cdots = e^{-\frac{1}{x}}(x - x^2 + 2x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!x^n) \\
&\qquad\qquad + (-1)^n n! \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} \,\mathrm{d}t \\
&= e^{-\frac{1}{x}} T_n(x) + R_n(x),
\end{aligned}
$$

missä $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(k-1)!x^k$ ja $R_n(x) = (-1)^n n! \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} \,\mathrm{d}t$. Sarja $T_n(x)$ hajaantuu jokaisella $x \neq 0$ (termin raja-arvo ei ole 0). Kuitenkin

$$
\begin{aligned}
|R_n(x)| &= n! \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} \,\mathrm{d}t \leq n! \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{1}{t^{n+1}} \,\mathrm{d}t \\
&= n! \lim_{c\to\infty} \Big/_{\frac{1}{x}}^{c} -\frac{1}{n} t^{-n} = (n-1)! \Big(\frac{1}{x}\Big)^{-n} = (n-1)!x^n
\end{aligned}
$$

Merkitsemällä $r_n = (n-1)!x^n$ nähdään, että $r_{n+1} = n!x^{n+1} = nxr_n$. Siten $r_{n+1} < r_n$, kun $nx < 1$ eli $n < \frac{1}{x}$, ja $r_{n+1} > r_n$, kun $nx > 1$ eli $n > \frac{1}{x}$.

Jos esimerkiksi $x = \frac{1}{4}$, niin pienin r_n on $r_4 = \frac{3!}{4^4} = \frac{3}{128} = r_5$ ja $f(\frac{1}{4}) \approx e^{-4}(\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3} - \frac{6}{4^4}) \approx 0{,}003577$.

Liite A

Reaalilukujen peruskäsitteitä

Usein tarkastelun kohteena ovat annetun joukon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, maksimi ja minimi sekä ylä- ja alarajat, erityisesti pienin yläraja (supremum) ja suurin alaraja (infimum).

Määritelmä A.0.19. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Reaalilukua $M \in \mathbb{R}$ sanotaan joukon A *maksimiksi* (eli *suurimmaksi arvoksi*), jos

(i) $x \leq M$ kaikilla $x \in A$ ja

(ii) $M \in A$.

Merkitään $M = \max A$.

Vastaavasti reaalilukua $m \in \mathbb{R}$ sanotaan joukon A *minimiksi* (eli *pienimmäksi arvoksi*), jos

(i) $x \geq m$ kaikilla $x \in A$ ja

(ii) $m \in A$.

Merkitään $m = \min A$.

Esimerkki A.0.20. $A = [3, 7]$.
$\min A = 3$, sillä $x \geq 3$ aina, kun $x \in A$, ja $3 \in A$.
$\max A = 7$, sillä $x \leq 7$ aina, kun $x \in A$, ja $7 \in A$.

Esimerkki A.0.21. Osoita, että joukolla $A = \,]0, 1[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ ei ole minimiä eikä maksimia.

Todistus: Osoitetaan ensin, että joukolla A ei ole minimiä. Vastaoletus: joukolla A on minimi m.

Tällöin $m \in A = \,]0, 1[$, joten $\frac{m}{2} \in A$ ja $\frac{m}{2} < m$. Täten m ei ole joukon A minimi ja saadaan ristiriita. Siis vastaoletus on väärä ja $\min A$ ei ole olemassa.

Osoitetaan sitten, että joukolla A ei ole maksimia. Vastaoletus: joukolla A on maksimi M.

Tällöin $M \in A$ eli $0 < M < 1$. Tällöin $M + 1 < 2$ ja $2M = M + M < M + 1$, ts. $M < \frac{M+1}{2} < 1$. Siis

$$\frac{M+1}{2} \in A \quad \text{ja} \quad \frac{M+1}{2} > M.$$

Täten M ei ole joukon A maksimi ja saadaan ristiriita. Siis vastaoletus on väärä ja $\max A$ ei ole olemassa.

Esimerkki A.0.22. Osoita, että joukolla $A = [0, \infty[$ on minimi 0, mutta ei maksimia.

Todistus: $\min A = 0$, sillä $x \geq 0$ kaikilla $x \in A$, ja $0 \in A$.

Osoitetaan sitten, että joukolla A ei ole maksimia. Tehdään vastaoletus: joukolla A on maksimi M. Jos $M < 0$, niin $M \notin A$ ja M ei voi olla joukon A maksimi. Jos $M \geq 0$, niin $M+1 \in A$ ja $M+1 > M$, joten M ei voi olla joukon A maksimi. Ristiriita.
Siis vastaoletus on väärä ja joukolla A ei ole maksimia.

Huomautus A.0.23. Maksimi ja minimi ovat yksikäsitteisiä, mikäli ne ovat olemassa.

Perustelu: Olkoot $M = \max A$ ja $M' = \max A$. Nyt $x \leq M'$ kaikilla $x \in A$. Tällöin $M \leq M'$, sillä $M \in A$. Toisaalta $x \leq M$ kaikilla $x \in A$ ja siten $M' \leq M$, koska $M' \in A$. Siis $M = M'$. Minimi todistetaan samalla tavalla (harjoitustehtävä).

Määritelmä A.0.24. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) Joukkoa A sanotaan *ylhäältä rajoitetuksi*, jos on olemassa sellainen $M \in \mathbb{R}$, että

$$x \leq M \quad \text{kaikilla} \quad x \in A.$$

Tällaista lukua M sanotaan joukon A *ylärajaksi*.

(ii) Joukkoa A sanotaan *alhaalta rajoitetuksi*, jos on olemassa sellainen $m \in \mathbb{R}$, että

$$x \geq m \quad \text{kaikilla} \quad x \in A.$$

Tällaista lukua m sanotaan joukon A *alarajaksi*.

(iii) Joukkoa A sanotaan *rajoitetuksi*, jos se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu.

Huomautus A.0.25. (1) Jos joukolla on maksimi tai minimi, niin se on vastaavasti joukon ylä- tai alaraja.

(2) Toisin kuin maksimi ja minimi, joukon ylä- ja alarajat eivät ole yksikäsitteisiä.

Esimerkki A.0.26. Osoita, että joukko $A =]0, 1[$ on rajoitettu.

Ratkaisu: Mikä tahansa luku $m \leq 0$ kelpaa joukon A alarajaksi, sillä tällöin $x \geq m$ kaikilla $x \in A$. Siis A on alhaalta rajoitettu.

Toisaalta mikä tahansa luku $M \geq 1$ kelpaa joukon A ylärajaksi, sillä tällöin $x \leq M$ kaikilla $x \in A$. Siten A on ylhäältä rajoitettu. Siis A on rajoitettu.

Esimerkki A.0.27. Joukko $A = [0, \infty[$ on alhaalta rajoitettu, mutta se ei ole ylhäältä rajoitettu.

Perustelu: Mikä tahansa luku $m \leq 0$ kelpaa alarajaksi, joten A on alhaalta rajoitettu.
Vastaoletus: A on ylhäältä rajoitettu ja olkoon M joukon A (eräs) yläraja. Koska $0 \in A$, niin $M \geq 0$. Silloin $M + 1 \in A$ ja $M + 1 > M$, joten M ei voi olla joukon A yläraja. Ristiriita. Siis A ei ole ylhäältä rajoitettu.

Esimerkki A.0.28. Määritellään joukko $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$ induktiivisesti

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Tutkitaan joukon A rajoittuneisuutta.

Nyt $x_1 = 1$ ja siten

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \\ x_3 &= \frac{1{,}5^2 + 2}{2 \cdot 1{,}5} \approx 1{,}417 \\ x_4 &= \frac{1{,}417^2 + 2}{2 \cdot 1{,}417} \approx 1{,}4142. \end{aligned}$$

Näyttäisi siltä, että alkiota x_1 lukuunottamatta joukon A jokainen alkio on vähintään $\sqrt{2}$ ja että $x_{n+1} \leq x_n$, kun $n \geq 2$. Todistetaan nämä väitteet oikeiksi.

Väite 1: $x_n \geq \sqrt{2}$, $n = 2, 3, \ldots$ $(x_1 = 1)$

Todistus: Selvästi $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} > 0$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ $(x_1 = 1)$. Lisäksi

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + (\sqrt{2})^2}{2x_n} \geq \frac{2x_n\sqrt{2}}{2x_n} = \sqrt{2}$$

sillä $x_n \neq 0$, kun $n = 1, 2, \ldots$ Edellä on käytetty ekvivalenssiin $a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ perustuvaa arviota $x_n^2 + (\sqrt{2})^2 \geq 2\sqrt{2}x_n$. Saatiin siis, että $x_n \geq \sqrt{2}$, kun $n = 2, 3, \ldots$, joten $x_n \geq 1 = x_1$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ Näin ollen A on alhaalta rajoitettu ja $\min A = 1$.

Väite 2: $x_{n+1} \leq x_n$, $n = 2, 3, \ldots$

Todistus: Väite voidaan yhtäpitävästi muuttaa seuraavaan muotoon:

$$\begin{aligned} x_{n+1} \leq x_n &\iff \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \leq x_n \\ &\iff x_n^2 + 2 \leq 2x_n^2 \quad (x_n > 0) \\ &\iff x_n^2 \geq 2 \\ &\iff x_n \geq \sqrt{2} \quad (x_n > 0). \end{aligned}$$

Koska $x_n \geq \sqrt{2} > 0$, kun $n = 2, 3, \ldots$, niin myös $x_{n+1} \leq x_n$, $n = 2, 3, \ldots$ Tästä seuraa, että $x_n \leq x_2 = \frac{3}{2}$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, joten A on ylhäältä rajoitettu ja $\max A = \frac{3}{2}$. Siis $1 = x_1 \leq x_n \leq x_2 = \frac{3}{2}$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, joten A on rajoitettu.

Varoitus: Ei ole olemassa yleistä menetelmää todistaa, että annettu joukko on rajoitettu. Aina sitä ei ole helppoa nähdä.

Huomautus: Käytännössä joukon rajoittuneisuus kannattaa usein todistaa seuraavan kriteerin avulla: Joukko $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, on rajoitettu jos ja vain jos on olemassa sellainen $K \geq 0$, että

$$|x| \leq K \quad \text{kaikilla } x \in A.$$

Perustelu: "$\Rightarrow$": Oletetaan, että $m \le x \le M$ kaikilla $x \in A$. Koska $|m| \le \max\{|m|, |M|\}$, niin

$$x \ge m \ge -|m| \ge -\max\{|m|, |M|\} \quad \text{kaikilla } x \in A$$

ja

$$x \le M \le |M| \le \max\{|m|, |M|\} \quad \text{kaikilla } x \in A.$$

Siten

$$-\max\{|m|, |M|\} \le x \le \max\{|m|, |M|\} \quad \text{kaikilla } x \in A,$$

eli $|x| \le \max\{|m|, |M|\}$. Täten esimerkiksi valinta $K = \max\{|m|, |M|\}$ kelpaa.

"$\Leftarrow$": Jos $|x| \le K$ jokaisella $x \in A$ ($K \ge 0$), niin $-K \le x \le K$ jokaisella $x \in A$. Siten $-K$ on joukon A alaraja ja K sen yläraja. Siis A on rajoitettu.

Määritelmä A.0.29. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \ne \emptyset$. Lukua $M \in \mathbb{R}$ sanotaan joukon A *pienimmäksi ylärajaksi* eli *supremumiksi*, jos

(i) $x \le M$ kaikilla $x \in A$ ja

(ii) jos $x \le M'$ kaikilla $x \in A$, niin $M' \ge M$.

(Kohta (i) kertoo sen, että M on yläraja ja (ii) sen, että M on ylärajoista pienin.) Merkitään $M = \sup A$.

Vastaavasti lukua $m \in \mathbb{R}$ sanotaan joukon A *suurimmaksi alarajaksi* eli *infimumiksi*, jos

(i) $x \ge m$ kaikilla $x \in A$ ja

(ii) jos $x \ge m'$ kaikilla $x \in A$, niin $m' \le m$.

(Kohta (i) kertoo sen, että m on alaraja ja (ii) sen, että m on alarajoista suurin.) Merkitään $m = \inf A$.

Määritelmän merkitys: Koska ylä- ja alarajat eivät ole yksikäsitteisiä, pyritään valitsemaan niille paras mahdollinen edustaja.

Huomautus A.0.30. (1) Jos joukolla A on maksimi, niin $\max A = \sup A$. Vastaavasti jos joukolla A on minimi, niin $\min A = \inf A$. Supremun ja infimum ovat maksimin ja minimin korvikkeita.

Perustelu: Olkoon $M = \max A$. Silloin $x \le M$ kaikilla $x \in A$, joten M on yläraja. Oletetaan, että $x \le M'$ kaikilla $x \in A$. Koska $M \in A$, niin $M \le M'$, joten M on pienin yläraja. Infimum todistetaan samaan tapaan (harjoitustehtävä).

(2) Mikäli supremum tai infimum on olemassa, niin se on yksikäsitteinen.

Perustelu: Olkoot $M = \sup A$ ja $M' = \sup A$. Koska M' on yläraja ja M on pienin yläraja, niin $M \le M'$. Toisaalta M on yläraja ja M' on pienin yläraja, joten $M' \le M$. Siis $M = M'$. Infimumin yksikäsitteisyys todistetaan samaan tapaan (harjoitustehtävä).

Esimerkki A.0.31. Olkoon $A =]0, 1[$. Määrätään $\sup A$ ja $\inf A$.

Ratkaisu: Olkoon $M = 1$. Osoitetaan, että $\sup A = M = 1$.

(i) $x \le M$ kaikilla $x \in A$, joten M on joukon A yläraja.

(ii) Olkoon $M' \in \mathbb{R}$ sellainen, että $x \leq M'$ kaikilla $x \in A$. Koska $\frac{1}{2} \in A$, niin $M' \geq \frac{1}{2} > 0$.

Osoitetaan, että $M' \geq M$. Vastaoletus: $M' < M$. Tällöin $0 < M' < 1$, joten $M' + 1 < 2$ ja $2M' = M' + M' < M' + 1$, ts. $M' < \frac{M'+1}{2} < 1$. Siis

$$\frac{M' + M}{2} \in A \quad \text{ja} \quad \frac{M' + M}{2} > M',$$

joten M' ei voi olla joukon A yläraja. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä ja $M' \geq M$.

Kohtien (i) ja (ii) nojalla $M = \sup A$.

Olkoon $m = 0$. Osoitetaan, että $\inf A = m = 1$.

(i) $x \geq m$ kaikilla $x \in A$, joten m on joukon A alaraja.

(ii) Olkoon $m' \in \mathbb{R}$ sellainen, että $x \geq m'$ kaikilla $x \in A$. Koska $\frac{1}{2} \in A$, niin $m' \leq \frac{1}{2}$.

Osoitetaan, että $m' \leq m$. Vastaoletus: $m' > m$. Nyt $0 = m < m' \leq \frac{1}{2}$, joten

$$\frac{m'}{2} \in A \quad \text{ja} \quad \frac{m'}{2} < m',$$

joten m' ei voi olla joukon A alaraja. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä ja $m' \leq m$.

Kohtien (i) ja (ii) nojalla $m = \inf A$.

Yleensä $\sup A$ ei kuulu joukkoon A. Seuraavan lauseen nojalla se kuuluu joukkoon A täsmälleen silloin kun se on joukon A maksimi. Vastaavat väitteet pätevät myös infimumille ja minimille.

Lause A.0.32. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ ja $M = \sup A$. Silloin joukolla A on maksimi (joka on M) jos ja vain jos $M \in A$. Olkoon $m = \inf A$. Silloin joukolla A on minimi (joka on m) jos ja vain jos $m \in A$.*

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletaan, että $Q = \max A$ on olemassa. Tällöin $x \leq Q$ aina, kun $x \in A$ (ts. Q toteuttaa supremumin ehdon (i)), ja $Q \in A$. Olkoon M' joukon A mikä tahansa yläraja, jolloin $x \leq M'$ aina, kun $x \in A$. Koska $Q \in A$, niin erityisesti $Q \leq M'$ ja Q toteuttaa supremumin ehdon (ii). Siis Q on joukon A pienin yläraja eli $Q = M = \sup A$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että $M \in A$. Tällöin lisäksi $x \leq M$ kaikilla $x \in A$, joten M on joukon A maksimi.

Infimumia ja minimiä koskeva väite todistetaan vastaavasti. $\square$

Esimerkki A.0.33. Määrää $\sup A$ ja $\inf A$, kun $A = \left\{2 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n = 1, 2, \dots\right\}$.

Osoitetaan, että $m = 1 = \inf A$.

(i) $2 - \frac{1}{n} \geq 1$, kun $n = 1, 2, \dots$, joten $m = 1$ on joukon A alaraja.

(ii) Jos m' on joukon A alaraja, niin $m' \leq 2 - \frac{1}{1} = 1$, joten $m' \leq m$. Siis $\inf A = 1$. (Koska $1 \in A$, niin $\min A = 1 = \inf A$.)

Osoitetaan seuraavaksi, että $M = 2 = \sup A$.

(i) $2-\frac{1}{n}\leq 2$, kun $n=1,2,\dots$, joten $M=2$ on joukon A yläraja.

(ii) Jos M' on joukon A yläraja, niin on osoitettava, että $M'\geq M=2$. Vastaoletus: $M'<2$. Valitaan $n\in\mathbb{N}$ niin, että
$$2-\frac{1}{n}>M' \iff n>\frac{1}{2-M'}.$$
Silloin $2-\frac{1}{n}\in A$ ja $2-\frac{1}{n}>M'$, joten M' ei ole joukon A yläraja. Ristiriita. Siten $\sup A=M=2$. ($2\notin A$, joten joukolla A ei ole maksimia.)

Täydellisyysaksiooma. Olkoon $A\subseteq\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$. Jos A on ylhäältä rajoitettu, niin joukolla A on pienin yläraja (eli $\sup A$ on olemassa). Jos A on alhaalta rajoitettu, niin joukolla A on suurin alaraja (eli $\inf A$ on olemassa).

Täydellisyysaksiooman merkitys on siinä, että vaikka rajoitetulla joukolla ei yleensä ole maksimia eikä minimiä, niin sillä kuitenkin on pienin yläraja ja suurin alaraja.

Huomautus A.0.34. Täydellisyysaksiooma on erittäin tärkeä reaalilukujen ominaisuus, jota esimerkiksi rationaaliluvuilla ei ole: Joukolla
$$A=\{x\in\mathbb{Q}\mid x\geq 0,\, x^2<2\}$$
ei ole supremumia joukossa $\mathbb{Q}$. Todistuksen idea: Koska $A\neq\emptyset$ ja A on ylhäältä rajoitettu, niin täydellisyysaksiooman nojalla on olemassa $M=\sup A\in\mathbb{R}$. Lisäksi $M^2=2$ (harjoitustehtävä). Koska $M\notin\mathbb{Q}$ ja supremum on yksikäsitteinen, niin joukolla A ei ole pienintä ylärajaa joukossa $\mathbb{Q}$. Siten $\mathbb{Q}$ ei toteuta täydellisyysaksioomaa.

Intuition mukaan täydellisyysaksiooma takaa, ettei reaaliakselissa ole reikiä. Reaaliluvut $\mathbb{R}$ voidaan määritellä järjestettynä kuntana, joka sisältää rationaaliluvut $\mathbb{Q}$ ja toteuttaa täydellisyysaksiooman. Karkeasti sanottuna reaalilukujen kaikki täydellisyysaksioomaan liittyvät ominaisuudet ovat analyysiä, muut algebraa. Ongelmana täydellisyysaksiooman käytössä on kuitenkin, ettei se anna mitään keinoa löytää supremumia tai infimumia. Käytännössä ensin on tehtävä (hyvä) arvaus ja sitten todistettava se oikeaksi.

Jos joukko ei ole ylhäältä rajoitettu, sillä ei ole supremumia (vastaavasti alhaalta rajoittamaton joukko ja infimum). Myöskään tyhjällä joukolla ei ole supremumia eikä infimumia. Usein kuitenkin käytetään seuraavia merkintöjä:
$$\begin{aligned}\sup A=\infty &\iff A \text{ ei ole ylhäältä rajoitettu},\\ \inf A=-\infty &\iff A \text{ ei ole alhaalta rajoitettu},\\ \sup\emptyset&=-\infty,\\ \inf\emptyset&=\infty\end{aligned}$$
(mikä tahansa luku on tyhjän joukon $\emptyset$ ylä- ja alaraja).

Käytännössä supremum kannattaa yrittää määrittää seuraavan lauseen avulla.

Lause A.0.35. *Oletetaan, että $A\subseteq\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$, A on ylhäältä rajoitettu ja että M on joukon A yläraja. Silloin $M=\sup A$ jos ja vain jos jokaista $\varepsilon>0$ kohti on olemassa sellainen $x\in A$, että*
$$x>M-\varepsilon.$$

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että $M = \sup A$ ja tehdään vastaoletus: On olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että $x \leq M - \varepsilon$ kaikilla $x \in A$

$$\begin{aligned}&\implies M - \varepsilon \text{ on joukon } A \text{ yläraja ja } M - \varepsilon < M \\ &\implies M \text{ ei ole pienin yläraja. Ristiriita.}\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$ ": Oletetaan, että M on joukon A yläraja, jolle lauseen ehto pätee. Jos $M' < M$, niin valitaan $\varepsilon = M - M' > 0$. Nyt on olemassa sellainen $x \in A$, että

$$x > M - \varepsilon = M - (M - M') = M'.$$

Siis M' ei ole joukon A yläraja, joten M on joukon A pienin yläraja. □

Vastaava tulos pätee myös infimumille:

Lause A.0.36. *Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A on alhaalta rajoitettu ja että m on joukon A alaraja. Silloin $m = \inf A$, jos ja vain jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $x \in A$, että*

$$x < m + \varepsilon.$$

Esimerkki A.0.37. Olkoon $A = \left\{2 - \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\right\}$. Osoita, että $\sup A = 2$.

Ratkaisu: Merkitään $M = 2$. Nyt $2 - \frac{1}{n} \leq 2$, $n = 1, 2, \dots$, joten $M = 2$ on joukon A yläraja.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan n niin, että

$$2 - \frac{1}{n} > 2 - \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Silloin $2 - \frac{1}{n} \in A$ ja $2 - \frac{1}{n} > M - \varepsilon$. Siten $M = \sup A$.

Huomaa, että tässä ei käytetty vastaoletusta (toisin kuin edellä). Vastaoletus sisältyy lauseeseen A.0.35.

Todistetaan seuraavaksi ilmeiseltä tuntuva väite, että luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ ei ole rajoitettu. Tätä ominaisuutta on jo käytetty esimerkeissä. Väite ei seuraa joukon $\mathbb{R}$ algebrallisista (ts. sen laskutoimitusten) ominaisuuksista vaan todistuksessa käytetään täydellisyysaksioomaa.

Lause A.0.38 (Arkhimedeen ominaisuus)**.** *Jokaista $x \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että*

$$x < n.$$

Todistus. Vastaoletus: On olemassa sellainen $x \in \mathbb{R}$, että $n \leq x$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Selvästi voidaan olettaa, että $x \geq 2$.

$$\begin{aligned}&\implies x \text{ on joukon } \mathbb{N} \text{ yläraja, joten } \mathbb{N} \text{ on ylhäältä rajoitettu} \\ &\implies \text{on olemassa } M = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R} \text{ (täydellisyysaksiooma)} \\ &\implies M - 1 \text{ ei ole joukon } \mathbb{N} \text{ yläraja, koska } M \text{ on pienin yläraja} \\ &\implies \text{on olemassa sellainen } m \in \mathbb{N}, \text{ että } m > M - 1 \text{ } (M - 1 \text{ ei ole yläraja}) \\ &\implies m + 1 > M \text{ ja } m + 1 \in \mathbb{N} \\ &\implies M \text{ ei voi olla joukon } \mathbb{N} \text{ yläraja. Ristiriita.}\end{aligned}$$

Kolmannen ja neljännen vaiheen voi perustella myös valitsemalla $A = \mathbb{N}$ ja $\varepsilon = 1$ lauseessa A.0.35. □

Huomautus A.0.39. Arkhimedeen ominaisuudesta seuraa, että jokaista $x > 0$ kohti on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$ että
$$\frac{1}{n} < x \quad (\text{eli } n > \frac{1}{x}).$$

Arkhimedeen ominaisuutta käyttämällä voidaan todistaa seuraava lause.

Lause A.0.40. *Kahden erisuuren reaaliluvun välissä on aina rationaaliluku, ts. rationaaliluvut ovat tiheässä joukossa* $\mathbb{R}$.

Todistus. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$ sellaisia, että $y - x > 0$. Osoitetaan, että on olemassa sellanen $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, että $x < \frac{m}{n} < y$. Todistuksen ideana on etsiä niin suuri luku $n \in \mathbb{N}$, että väli $]nx, ny[$ sisältää ainakin yhden kokonaisluvun m.

Nyt $y - x > 0$, joten Arkhimedeen ominaisuuden nojalla löytyy sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $n > \frac{1}{y-x}$. Koska $y - x > 0$, niin $\frac{1}{n} < y - x$.

Olkoon $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \cdot \frac{1}{n} > x\} = \{k \in \mathbb{Z} \mid k > xn\}$ $(n > 0)$. Arkhimedeen ominaisuuden nojalla $A \neq \emptyset$. Nyt $n(-x) \in \mathbb{R}$, joten Arkhimedeen ominaisuuden nojalla löytyy sellainen $p \in \mathbb{N}$, että $p > n(-x)$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow -p \cdot \frac{1}{n} < x \\ &\Longrightarrow -p, -(p+1), -(p+2), \ldots \notin A. \end{aligned}$$

Siten A on alhaalta rajoitettu kokonaislukujen joukko, joten $\inf A$ on olemassa. Valitaan $\varepsilon = 1$ lauseessa A.0.36. Tällöin on olemassa sellainen $m \in A$, että $m < \inf A + 1$ eli $m - 1 < \inf A$. Siis $m \in A$ ja $m - 1 \notin A$, eli $\frac{m}{n} > x$ ja $(m-1) \cdot \frac{1}{n} \leq x$. Näin ollen

$$\frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y,$$

joten $x < \frac{m}{n} < y$. □

Seuraus A.0.41. *Kahden erisuuren reaaliluvun välissä on aina irrationaaliluku.*

Todistus. Olkoot luvut x ja y sekä $y > x$. Lauseen A.0.40 nojalla välillä $]x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}[$ on rationaaliluku $\frac{m}{n}$, ts.
$$x - \sqrt{2} < \frac{m}{n} < y - \sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad x < \frac{m}{n} + \sqrt{2} < y.$$
Lisäksi $\frac{m}{n} + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, sillä $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. □

Seuraus A.0.42. *Kahden erisuuren reaaliluvun välissä on äärettömän monta rationaali- ja irrationaalilukua.*

Todistus. Olkoot luvut x ja y, $y > x$. Tehdään vastaoletus: Lukujen x ja y välissä on n kappaletta rationaalilukuja. Väli $]x, y[$ voidaan jakaa osaväleihin, joita on $(n + 1)$ kappaletta. Lauseen A.0.40 nojalla jokaisella osavälillä on ainakin yksi rationaaliluku, joten väliltä $]x, y[$ löytyy $n + 1$ rationaalilukua. Tämä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa, joten lukujen x ja y välissä on ääretön määrä rationaalilukuja. Irrationaalilukuja koskeva väite todistetaan samalla tavalla käyttämällä seurausta A.0.41. □

Lause A.0.43 (sisäkkäisten välien periaate)**.** *Jos* $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots$ *ovat sisäkkäisiä suljettuja välejä (*a_n*,* $b_n \in \mathbb{R}$*,* $n = 1, 2, \ldots$*), niin*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

On siis olemassa sellainen $x \in \mathbb{R}$*, että* $x \in [a_n, b_n]$ *kaikilla* $n = 1, 2, \ldots$

Huomautus A.0.44. (1) Sisäkkäisten välien periaate kertoo saman kuin täydellisyysaksioomakin eli ettei reaaliakselilla ole reikiä. Voidaan todistaa, että sisäkkäisten välien periaate on yhtäpitävä täydellisyysaksiooman kanssa.

(2) Lauseen kannalta on olennaista, että välit ovat suljettuja, esimerkiksi

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]0, \frac{1}{n}\right[= \emptyset.$$

Perustelu: Vastaoletus: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]0, \frac{1}{n}\right[\neq \emptyset$. Tällöin on olemassa sellainen $x \in \mathbb{R}$, että $x \in \left]0, \frac{1}{n}\right[$ aina, kun $n = 1, 2, \ldots$ Tälle luvulle x pätee siis $0 < x < \frac{1}{n}$ eli $n < \frac{1}{x}$ aina, kun $n = 1, 2, \ldots$ Tämä on ristiriidassa Arkhimedeen ominaisuuden kanssa.

Huomaa, että $\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{n}] = \{0\}$ (harjoitustehtävä).

(3) Lauseen kannalta on olennaista, että välit ovat rajoitettuja:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, \infty[= \emptyset$$

(harjoitustehtävä).

Lauseen A.0.43 todistus. Merkitään $I_n = [a_n, b_n]$. Tällöin $I_n \subseteq I_1$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow\ a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots \\
&\Longrightarrow\ A = \{a_n \mid n = 1, 2, \ldots\} \text{ on ylhäältä rajoitettu ja } A \neq \emptyset \\
&\Longrightarrow\ \text{on olemassa } M = \sup A \in \mathbb{R} \text{ (täydellisyysaksiooma)}
\end{aligned}$$

Koska $M = \sup A$ on joukon A yläraja, niin $a_n \leq M$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$

Väite: $M \leq b_n$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$

Perustelu: Todistetaan, että jokainen b_n, $n = 1, 2, \ldots$, on joukon A yläraja. Oletetaan, että n on kiinnitetty.

$$\begin{aligned}
k \geq n &\Longrightarrow I_k \subseteq I_n \Longrightarrow a_k \leq b_k \leq b_n \\
k < n &\Longrightarrow I_n \subseteq I_k \Longrightarrow a_k \leq a_n \leq b_n.
\end{aligned}$$

Siten $a_k \leq b_n$ jokaisella $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow\ b_n \text{ on joukon } A \text{ yläraja} \\
&\Longrightarrow\ M \leq b_n, \text{ koska } M \text{ on pienin yläraja} \\
&\Longrightarrow\ a_n \leq M \leq b_n \text{ kaikilla } n = 1, 2, \ldots \\
&\Longrightarrow\ M \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].
\end{aligned}$$

□

Esimerkki A.0.45. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Valitaan a_1, $b_1 \in \mathbb{Q}$, $a_1 < b_1$ niin, että

$$x \in [a_1, b_1] .$$

Jaetaan väli $[a_1, b_1]$ kahteen osaan keskipisteestä

$$\frac{a_1 + b_1}{2}$$

ja valitaan näistä väli $[a_2, b_2]$ niin, että $a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$, $a_2 < b_2$ ja

$$x \in [a_2, b_2].$$

Jatketaan näin. Kun $[a_n, b_n]$ on valittu, niin jaetaan se kahteen osaan keskipisteestä

$$\frac{a_n + b_n}{2}$$

ja valitaan näistä seuraava väli $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, $a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{Q}$, $a_{n+1} < b_{n+1}$ niin, että

$$x \in [a_{n+1}, b_{n+1}].$$

Siis

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n+1} \leq x \leq b_{n+1} \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

Näin saadaan jono suljettuja sisäkkäisiä välejä

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots ,$$

joiden pituudet

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \cdots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Lisäksi

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Näin jokainen reaaliluku saadaan määriteltyä rationaalipäätepisteisten välien avulla.

Liite B

Lukujonoista

B.1 Lukujonon raja-arvo

Määritelmä B.1.1. Reaalilukujono

$$(x_n) = x_1, x_2, x_3, \ldots$$

on kuvaus $x \colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$, missä $x(n) = x_n$.

Määritelmän tarkoitus: Jokaista lukua $n = 1, 2, \ldots$ asetetaan vastaamaan reaaliluku x_n. Määritelmää käytetään myös joukon $\mathbb{Z}_+$ äärettömille osajoukoille numeroimalla niiden alkiot uudelleen.

Varoitus: Jonoa (x_n) ei saa samaistaa joukkoon

$$\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\}.$$

Esimerkiksi

$$(x_n) = 0, 1, 0, 1, \ldots$$
$$(y_n) = 1, 0, 1, 0, \ldots$$

ovat eri jonoja vaikka

$$\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\} = \{y_n \mid n = 1, 2, \ldots\} = \{0, 1\}.$$

Jonoissa esimerkiksi termien järjestystä ei saa muuttaa!

Määritelmä B.1.2. Jonon (x_n) sanotaan *suppenevan* kohti lukua $a \in \mathbb{R}$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

aina, kun $n \geq n_\varepsilon$. Tällöin sanotaan, että a on jonon (x_n) *raja-arvo* ja merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{tai} \quad x_n \to a, \text{ kun } n \to \infty.$$

Jos jono ei suppene kohti mitään lukua, niin sanotaan, että se *hajaantuu*.

Määritelmän tarkoitus: Kaikki termit x_n ovat mielivaltaisen lähellä pistettä a, kun n on riittävän suuri.

Huomautus B.1.3. (1) Suppenevan jonon raja-arvo on yksikäsitteinen luku. Jono ei siis voi supeta kohti kahta eri lukua.

Perustelu: Tehdään vastaoletus: $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ ja $b = \lim_{n\to\infty} x_n$ sekä $a \neq b$. Valitaan $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2} > 0$. Tällöin määritelmän B.1.2 nojalla on olemassa sellaiset n'_ε, $n''_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< \varepsilon, \text{ kun } n \geq n'_\varepsilon, \text{ ja} \\ |x_n - b| &< \varepsilon, \text{ kun } n \geq n''_\varepsilon. \end{aligned}$$

Kolmioepäyhtälön nojalla on voimassa arvio

$$\begin{aligned} |b - a| &= |b - x_n + x_n - a| \leq |b - x_n| + |x_n - a| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |b - a|, \end{aligned}$$

kun $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$. Tämä on ristiriita, joten $a = b$.

(2) Raja-arvon määritelmä ei anna keinoa määrittää raja-arvoa. Käytännössä ensin on tehtävä arvaus siitä, mikä raja-arvo on, ja sitten todistettava arvaus oikeaksi. Tässä on sama vaikeus kuin täydellisyysaksiooman käytössä.

Joskus raja-arvon sanotaan olevan ∞ (tai $-\infty$), jolloin käytetään seuraavaa määritelmää.

Määritelmä. Jonon (x_n) sanotaan hajaantuvan kohti ääretöntä, merkitään $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (vastaavasti $-\infty$), jos ja vain jos jokaista $M \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, että $x_n > M$ (vastaavasti $x_n < M$) kaikilla $n \geq n_0$.

Esimerkki B.1.4. (x_n), $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Väite: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Perustelu: Olkoon $\varepsilon > 0$. Silloin

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ kun } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Valitaan n_ε pienimmäksi kokonaisluvuksi, joka on suurempi kuin $\dfrac{1}{\varepsilon}$ (valinta mahdollista Arkhimedeen ominaisuuden nojalla).

Esimerkki B.1.5. Jono $(x_n) = 0, 1, 0, 1, \ldots$ hajaantuu.

Perustelu: Vastaoletus: Jono (x_n) suppenee. Tällöin raja-arvo $a = \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$ on olemassa. Siis jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että $|x_n - a| < \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_\varepsilon$. Erityisesti, lukua $\varepsilon = \frac{1}{2}$ kohti on olemassa sellainen $n_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{Z}_+$, että $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ aina, kun $n \geq n_{\frac{1}{2}}$. Täten

$$1 = |x_n - x_{n+1}| \leq |x_n - a| + |a - x_{n+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

jokaisella $n \geq n_{\frac{1}{2}}$, mikä on ristiriita. Siis jono (x_n) hajaantuu.

Esimerkki B.1.6. Jono (x_n), $x_n = (-1)^n\big(1 - \dfrac{1}{n}\big)$, $n = 1, 2, \ldots$ hajaantuu (vaikka kuvasta katsottuna näyttäisikin suppenevan kohti sekä lukua -1 että lukua 1) (harjoitustehtävä).

Esimerkki B.1.7. Tutkitaan jono (x_n), $x_n = \dfrac{3n+2}{5n+3}$, $n = 1, 2, \ldots$, suppenemista.

Arvauksen tekeminen: Kun n on suuri, niin

$$\frac{3n+2}{5n+3} = \frac{3+\frac{2}{n}}{5+\frac{3}{n}} \approx \frac{3}{5}.$$

Väite: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3}{5}$.

Perustelu: Olkoon $\varepsilon > 0$. Silloin

$$\left|x_n - \frac{3}{5}\right| = \left|\frac{3n+2}{5n+3} - \frac{3}{5}\right| = \left|\frac{15n+10-15n-9}{5(5n+3)}\right| = \frac{1}{5(5n+3)} < \frac{1}{25n} < \varepsilon,$$

kun $n > \dfrac{1}{25\varepsilon}$. Siten n_ε voidaan valita pienimmäksi kokonaisluvuksi, joka on suurempi kuin $\dfrac{1}{25\varepsilon}$.

Esimerkki B.1.8. (x_n), $x_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{n}}$, $n = 1, 2, \ldots$

Arvauksen tekeminen: Kun n on suuri, niin

$$\sqrt{\frac{2n+1}{n}} = \sqrt{2+\frac{1}{n}} \approx \sqrt{2}.$$

Väite: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

Perustelu: Olkoon $\varepsilon > 0$. Silloin

$$\begin{aligned}|x_n - \sqrt{2}| &= \left|\sqrt{\frac{2n+1}{n}} - \sqrt{2}\right| = \frac{\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right|}{\sqrt{\frac{2n+1}{n}} + \sqrt{2}} = \frac{1}{n\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}} + \sqrt{2}\right)} \\ &< \frac{1}{2\sqrt{2}n} < \varepsilon,\end{aligned}$$

kun $n > \dfrac{1}{2\sqrt{2}\varepsilon}$. Siten n_ε voidaan valita pienimmäksi kokonaisluvuksi, joka on suurempi kuin $\dfrac{1}{2\sqrt{2}\varepsilon}$.

Määritelmä B.1.9. Jonoa (x_n) sanotaan *rajoitetuksi*, jos sitä vastaava joukko $\{x_n\}$ on rajoitettu eli on olemassa sellainen reaaliluku $M > 0$, että

$$|x_n| \leq M \quad \text{kaikilla } n = 1, 2, \ldots$$

Lemma B.1.10. *Suppeneva jono (x_n) on rajoitettu.*

Todistus. Olkoon $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Tällöin

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+ \text{ siten, että } |x_n - a| < \varepsilon, \text{ kun } n \geq n_\varepsilon.$$

Valitaan $\varepsilon = 1$, jolloin

$$\begin{aligned}&\exists\, n_1 \in \mathbb{Z}_+ \text{ siten, että } |x_n - a| < 1, \text{ kun } n \geq n_1 \\ \Longrightarrow\ & |x_n| \leq |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|, \text{ kun } n \geq n_1.\end{aligned}$$

Toisaalta

$$|x_n| \le \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_1}|\}, \quad \text{kun } n \le n_1.$$

Siis

$$|x_n| \le \max\{1 + |a|, |x_1|, \ldots, |x_{n_1}|\}$$

kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, ja väite pätee, kun valitaan siinä $M = \max\{1 + |a|, |x_1|, \ldots, |x_{n_1}|\}$. $\square$

Huomautus B.1.11. Käänteinen väite ei päde. Siitä, että jono on rajoitettu, ei seuraa, että se suppenee. Esimerkiksi jono $(x_n) = 0, 1, 0, 1, \ldots$ hajaantuu vaikka se on rajoitettu.

Lemmaa B.1.10 voidaan kuitenkin käyttää jonon hajaantumisen näyttämiseen. Esimerkiksi jono (x_n), $x_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$, ei ole rajoitettu, joten se ei suppene.

Esimerkki B.1.12. Olkoon (x_n),

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ pariton}, \\ n, & n \text{ parillinen}. \end{cases}$$

Jono (x_n) ei ole rajoitettu, joten se ei suppene (vaikka kuvasta katsottuna näyttäisikin suppenevan kohti nollaa).

Esimerkki B.1.13. Tarkastellaan jonoa (s_n), missä

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Osoita, että jono (s_n) hajaantuu.

Perustelu: Osoitetaan, että (s_n) ei ole rajoitettu. Nyt

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1, \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2}, \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}, \\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Induktiolla luvun n suhteen voidaan todistaa, että

$$s_{2^n} \ge 1 + n \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ja $1 + \frac{n}{2} \to \infty$, kun $n \to \infty$. Siis (s_n) ei ole rajoitettu, eikä siten suppene. (Harmoninen sarja hajaantuu.)

Huomaa, että (s_n) hajaantuu todella hitaasti: $s_n \approx 12{,}1$ kun $n = 100000$. Laskimesta tai tietokoneesta ei juurikaan ole apua suppenemisen toteamisessa.

Huomautus B.1.14. Raja-arvoille pätevät seuraavat algebralliset ominaisuudet (harjoitustehtävä): Jos jonot (x_n) ja (y_n) suppenevat sekä $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, niin myös jonot $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$ ja $(x_n y_n)$ suppenevat. Jos $y_n \ne 0$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, ja $b \ne 0$, niin myös jono $(\frac{x_n}{y_n})$ suppenee. Näiden jonojen raja-arvot ovat tällöin

(i) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$,

(ii) $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$,

(iii) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$,

(iv) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, kun $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, ja $b \neq 0$.

Varoitus: Siitä, että summajono $(x_n + y_n)$ suppenee, ei voi päätellä, että alkuperäiset jonot (x_n) ja (y_n) suppenevat. Vastaava tulos pätee muillekin laskutoimuksille. Jos esimerkiksi $x_n = (-1)^n$ ja $y_n = (-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, niin $x_n + y_n = 0$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ Näin ollen

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0,$$

mutta jonot (x_n) ja (y_n) eivät suppene.

Lause B.1.15 (epäyhtälön säilymisen periaate)**.** *Olkoot (x_n) ja (y_n) sellaisia suppenevia jonoja, että $x_n \leq y_n$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Silloin*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Todistus. Merkitään $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ ja $b = \lim_{n\to\infty} y_n$. Olkoon $\varepsilon > 0$, jolloin on olemassa sellaiset n'_ε ja n''_ε, että

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kaikilla } n \geq n'_\varepsilon, \quad \text{ja} \\ |y_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kaikilla } n \geq n''_\varepsilon. \end{aligned}$$

Koska $a - x_n \leq |x_n - a|$ ja $y_n - b \leq |y_n - b|$, niin

$$\begin{aligned} & a - x_n < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad y_n - b < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kun } n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\} = n_\varepsilon \\ \implies & a - b = (a - x_n) + (y_n - b) + \underbrace{(x_n - y_n)}_{\leq 0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ kun } n \geq n_\varepsilon \\ \implies & a - b < \varepsilon \quad \text{kaikilla } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Täten $a - b \leq 0$, eli $\lim_{n\to\infty} x_n = a \leq b = \lim_{n\to\infty} y_n$. □

Varoitus: Aito epäyhtälö ei välttämättä säily rajankäynnissä:

$$x_n < y_n \;\not\Longrightarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Esimerkiksi $x_n = 0$, $y_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Tällöin

$$x_n < y_n, \; n = 1, 2, \ldots, \quad \text{mutta} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Lausetta B.1.15 vastaava tulos pätee myös silloin, kun raja-arvo on $\pm\infty$. Todistus jätetään harjoitukseksi.

Lause B.1.16. *Olkoot* (x_n) *ja* (y_n) *jonoja. Oletetaan, että on olemassa sellainen* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, *että* $x_n \leq y_n$ *kaikilla* $n \geq n_0$. *Jos* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *niin myös* $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$. *Jos* $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$, *niin myös* $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Jos annetun jonon alkioille tiedetään samaa lukua kohti suppeneva ylä- ja alaraja, niin samaan tapaan kuin epäyhtälön säilymisen periaate saadaan seuraava, käyttökelpoinen tulos.

Lause B.1.17 (suppiloperiaate)**.** *Oletetaan, että* (x_n), (y_n) *ja* (z_n) *ovat sellaisia jonoja, että*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \quad \textit{kaikilla } n = 1, 2, \ldots$$

Jos (x_n) *ja* (z_n) *suppenevat kohti samaa lukua eli*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \lim_{n\to\infty} z_n,$$

niin myös (y_n) *suppenee ja*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen, jolloin on olemassa sellaiset n'_ε ja n''_ε, että

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq n'_\varepsilon, \quad \text{ja} \\ |z_n - a| &< \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq n''_\varepsilon. \end{aligned}$$

Koska

$$\begin{aligned} a - x_n &\leq |x_n - a| < \varepsilon, \quad \text{kun } n \geq n'_\varepsilon, \text{ ja} \\ z_n - a &\leq |z_n - a| < \varepsilon, \quad \text{kun } n \geq n''_\varepsilon, \end{aligned}$$

niin

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon, \quad \text{kun } n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\} = n_\varepsilon.$$

Siis

$$|y_n - a| < \varepsilon, \quad \text{kaikilla } n \geq n_\varepsilon,$$

joten $\lim_{n\to\infty} y_n = a$. □

Huomautus B.1.18. Suppiloperiaattessa on tärkeää, että jonot (x_n) ja (z_n) suppenevat kohti samaa lukua.

Esimerkiksi jonoille $x_n = -1$, $y_n = (-1)^n$ ja $z_n = 1$, kun $n = 1, 2, \ldots$, on voimassa

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -1 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} z_n$$

ja $x_n \leq y_n \leq z_n$, mutta (y_n) hajaantuu.

Esimerkki B.1.19. Osoita, että $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$.

Ratkaisu: Koska $-1 \leq \sin n \leq 1$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, niin

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Valitaan suppiloperiaatteessa

$$x_n = -\frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{\sin n}{n}, \quad z_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0,$$

joten myös $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

Varoitus:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} \neq \frac{\lim_{n\to\infty} \sin n}{\lim_{n\to\infty} n} \quad \text{(jälkimmäinen ei ole olemassa)}$$

Esimerkki B.1.20. Osoita, että $\lim_{n\to\infty} \dfrac{5n+4}{5n^2+4n+3} = 0$.

Ratkaisu: Arvioidaan lauseketta $\dfrac{5n+4}{5n^2+4n+3}$ ylöspäin ja alaspäin (esimerkiksi) seuraavasti:

$$\frac{5}{12n} = \frac{5n}{12n^2} = \frac{5n}{5n^2+4n^2+3n^2} \leq \frac{5n+4}{5n^2+4n+3} \leq \frac{5n+4+3n^{-1}}{5n^2+4n+3} = \frac{1}{n},$$

kun $n = 1, 2, \ldots$ Valitaan suppiloperiaatteessa

$$x_n = \frac{5}{12n}, \quad y_n = \frac{5n+4}{5n^2+4n+3}, \quad z_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

jolloin $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0$ ja siten myös

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+4}{5n^2+4n+3} = 0.$$

Huomaa, että nämä esimerkit voidaan myös käsitellä suoraan suppenevan jonon määritelmän avulla.

B.2 Monotoniset jonot

Määritelmä B.2.1. Jonoa (x_n) sanotaan

(i) *kasvavaksi*, jos $x_{n+1} \geq x_n$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$,
aidosti kasvavaksi, jos $x_{n+1} > x_n$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$,

(ii) *väheneväksi*, jos $x_{n+1} \leq x_n$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$,
aidosti väheneväksi, jos $x_{n+1} < x_n$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$,

(iii) *monotoniseksi*, jos se on kasvava tai vähenevä,
aidosti monotoniseksi, jos se on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

Esimerkki B.2.2. (1) $x_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$ (x_n) on aidosti kasvava.

(2) $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ (x_n) on aidosti vähenevä.

(3) $x_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ (x_n) on vakiojonona sekä kasvava että vähenevä.

(4) $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ (x_n) ei ole kasvava eikä vähenevä.

Lause B.2.3 (monotonisen suppenemisen lause)**.** *Monotoninen jono suppenee jos ja vain jos se on rajoitettu. Lisäksi pätee:*

(i) Jos (x_n) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, niin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\}.$$

(ii) Jos (x_n) on vähenevä ja alhaalta rajoitettu, niin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\}.$$

Todistus. "$\Rightarrow$": Jos jono (x_n) suppenee, niin lemman B.1.10 nojalla se on rajoitettu.

"$\Leftarrow$": Todistetaan kohta (i). Tällöin erityisesti kasvava ja rajoitettu jono suppenee, eli kohdasta (i) seuraa ensimmäisen väitteen toinen suunta kasvaville jonoille. Olkoon (x_n) kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Tällöin on olemassa sellainen $M \in \mathbb{R}$, että

$$x_n \le M \quad \text{kaikilla } n = 1, 2, \ldots$$

Täydellisyysaksiooman nojalla

$$\sup\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\} = a \in \mathbb{R}$$

on olemassa. Osoitetaan, että $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Lauseen A.0.35 nojalla on olemassa sellainen n_ε, että $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$. Koska jono (x_n) on kasvava, niin

$$\begin{aligned}
& x_n \ge x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \ge n_\varepsilon \\
\Longrightarrow\ & a - \varepsilon < x_n \le a < a + \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \ge n_\varepsilon \quad (a \text{ on yläraja}) \\
\Longrightarrow\ & -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \ge n_\varepsilon \\
\Longrightarrow\ & |x_n - a| < \varepsilon \quad n \ge n_\varepsilon \\
\Longrightarrow\ & a = \lim_{n\to\infty} x_n.
\end{aligned}$$

Kohta (ii) todistetaan vastaavalla tavalla (harjoitustehtävä). □

Huomautus B.2.4. (1) Edellä monotonisuusoletus on olennainen. Esimerkiksi jono $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$, on rajoitettu, mutta se ei suppene.

(2) Voidaan osoittaa, että monotonisen suppenemisen lause on yhtäpitävä täydellisyysaksiooman kanssa (harjoitustehtävä).

Esimerkki B.2.5 (Newtonin menetelmä)**.** Jatkoa esimerkkiin A.0.28. Olkoon $f(x) = x^2 - 2$. Silloin

$$f(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}.$$

Asetetaan $x_1 = 1$. Käyrän $y = f(x)$ pisteeseen $(x_1, f(x_1))$ piirretyn tangentin yhtälö on

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

Tangentti leikkaa x-akselin, kun $y = 0$, eli kohdassa

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = \frac{x_1^2 + 2}{2x_1}.$$

Merkitään $x_2 = \frac{x_1^2+2}{2x_1}$. Vastaavasti käyrän pisteeseen $(x_2, f(x_2))$ piirretty tangentti leikkaa x-akselin kohdassa $x_3 = \frac{x_2^2+2}{2x_2}$, jne. Iteroidaan tätä: Olkoon

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2x_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Väite 1: Jos (x_n) suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

Perustelu: Olkoon $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Koska $x_n \geq 1$, $n = 1, 2, \ldots$ (esimerkki 1.6), niin epäyhtälön säilymisperiaatteen nojalla $a \geq 1 > 0$.

$$\begin{aligned}
&\implies a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2+2}{2x_n} = \frac{\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 + 2}{2\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)} = \frac{a^2+2}{2a} \\
&\implies 2a^2 = a^2 + 2 \quad (a > 0) \\
&\implies a^2 = 2 \\
&\implies a = \pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Koska $a > 0$, niin $a = \sqrt{2}$.

Väite 2: Jono (x_n) suppenee (tämä ei ole selvää!).

Perustelu: Esimerkissä 1.6 on jo osoitettu, että $x_{n+1} \leq x_n$, $n = 2, 3, \ldots$ ja että $x_n \geq \sqrt{2}$, $n = 2, 3, \ldots$ Siten jono $x_2, x_3, \ldots$ on vähenevänä ja rajoitettuna jonona suppeneva. Siis $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ on olemassa ja Väitteen 1 nojalla $a = \sqrt{2}$.

Varoitus: Raja-arvon olemassaolo on todistettava erikseen rekursiivisesti määritellyille jonoille.

Esimerkki B.2.6. Olkoon

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2+1}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Jos $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ olisi olemassa, niin

$$\begin{aligned}
a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2+1}{2} = \frac{a^2+1}{2} \\
&\implies a^2 - 2a + 1 = 0 \\
&\implies (a-1)^2 = 0 \\
&\implies a = 1.
\end{aligned}$$

Tässä tapauksessa raja-arvoa *ei ole* olemassa, ts. (x_n) ei suppene.

Perustelu:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2+1}{2} = \frac{x_n^2}{2} + \frac{1}{2} \geq x_n + \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

sillä

$$\frac{x_n^2}{2} \geq x_n \iff x_n\left(\frac{x_n}{2} - 1\right) \geq 0 \iff x_n \geq 2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Todistetaan induktiolla, että $x_n \geq 2$, $n = 1, 2, \ldots$

1) $x_1 = 2$.

2) Tehdään induktio-oletus: $x_k \geq 2$ jollakin $k \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 1}{2} \geq \frac{2^2 + 1}{2} = \frac{5}{2} \geq 2.$$

Induktioperiaatteen nojalla $x_n \geq 2$, $n = 1, 2, \ldots$ Tästä seuraa (induktiolla), että

$$x_n \geq x_{n-1} + \frac{1}{2} \geq x_{n-2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \geq \cdots \geq x_1 + (n-1)\frac{1}{2} = 2 + \frac{n-1}{2},$$

kun $n = 1, 2, \ldots$ Siten jono (x_n) ei ole rajoitettu eikä se suppene.

Esimerkki B.2.7. Olkoon

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Osoita, että jono (s_n) suppenee.

Ratkaisu: Selvästi (s_n) on (aidosti) kasvava, sillä $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)!} > s_n$, kun $n = 1, 2, \ldots$. Lisäksi

$$\begin{aligned}
s_n &\leq 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\
&= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= 3 - \frac{1}{n} \leq 3, \quad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Edellä on käytetty ensin arviota $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(k-1)k}$ ja sitten osamurtohajotelmaa

$$\frac{1}{(k-1)k} = \frac{k - (k-1)}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

kun $k = 2, \ldots, n$. Jono (s_n) siis suppenee, koska se on kasvava ja rajoitettu. Voidaan osoittaa (tosin ei helposti), että raja-arvo on Neperin luku $e = 2{,}718281828459\ldots$, toisin sanoen

$$e = \lim_{n \to \infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Esimerkki B.2.8. Olkoon $x_1 = 1$ ja $x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^2 + 9), n = 1, 2, \ldots$ Osoita, että lukujono (x_n) suppenee ja määrää $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Ratkaisu:

Väite 1: Jos (x_n) suppenee, niin $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 3$.

Todistus: Jos $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ on olemassa, niin

$$\begin{aligned}
a = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6}(x_n^2 + 9) = \frac{1}{6}((\lim_{n \to \infty} x_n)^2 + 9) = \frac{a^2 + 9}{6} \\
&\implies a^2 - 6a + 9 = 0 \\
&\implies (a - 3)^2 = 0 \\
&\implies a = 3.
\end{aligned}$$

Väite 2: $0 < x_n < 3$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$.

Todistus: Todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen.
1) Väite on tosi, kun $n = 1$, sillä $0 < x_1 = 1 < 3$.
2) Induktio-oletus: Väite on tosi, kun $n = k$, toisin sanoen $0 < x_k < 3$.
Induktioväite: Väite on tosi, kun $n = k + 1$, toisin sanoen $0 < x_{k+1} < 3$.
Induktiotodistus: Koska $x_k > 0$, niin $x_{k+1} = \frac{1}{6}(x_k^2 + 9) > 0$ ja induktio-oletuksen nojalla

$$x_{k+1} = \frac{(x_k^2 + 9)}{6} < \frac{9 + 9}{6} = 3$$

(koska $0 < x_k < 3$, niin $x_k^2 < 9$). Siis $0 < x_{k+1} < 3$. Induktioperiaatteen nojalla Väite 2 on tosi kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Väite 3: $x_{n+1} > x_n$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$

Todistus: Väitteen 2 nojalla

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{6}(x_n^2 + 9) - x_n = \frac{(x_n - 3)^2}{6} > 0,$$

joten $x_{n+1} > x_n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Täten jono (x_n) on kasvava ja (ylhäältä) rajoitettu, joten monotonisen suppenemisen lauseen nojalla (x_n) suppenee. Väitteen 1 nojalla $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$.

B.3 Osajonot

Määritelmä B.3.1. Jonoa (y_k) sanotaan jonon (x_n) *osajonoksi*, jos on olemassa sellaiset luvut $n_1 < n_2 < \ldots$, että

$$y_k = x_{n_k} \quad \text{kaikilla } k = 1, 2, \ldots$$

Määritelmän tarkoitus: Osajono saadaan alkuperäisestä jonosta jättämällä pois tämän alkioita ja numeroimalla saadun jonon alkiot uudelleen samassa järjestyksessä.

Huomautus B.3.2. (1) Jono (x_n) on sellainen kuvaus $x\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$, että $x(n) = x_n$. Olkoot $n_k \in \mathbb{Z}_+$ sellaisia, että $n_1 < n_2 < \ldots$ Tällöin on olemassa kuvaus

$$\sigma\colon \mathbb{Z}_+ \to \{n_1, n_2, \ldots\}, \quad \sigma(k) = n_k.$$

Osajono (x_{n_k}) on yhdistetty kuvaus

$$x \circ \sigma\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}, \qquad (x \circ \sigma)(k) = x(\sigma(k)) = x(n_k) = x_{n_k}.$$

(2) Huomaa, että aina $n_k \geq k$.

Esimerkki B.3.3. Olkoot $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Seuraavassa on eräitä jonon (x_n) osajonoja:

$$(y_k) = (x_{2k}) = \left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$$
$$(y_k) = (x_{2k-1}) = \left(\frac{1}{2k-1}\right) = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$$

$$(y_k) = (x_{2^k}) = \left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$
$$(y_k) = (x_{k!}) = \left(\frac{1}{k!}\right) = 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots$$

Seuraavat jonot *eivät ole* jonon (x_n) osajonoja:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \ldots$$
$$\frac{1}{1}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \ldots$$
$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$$

Lause B.3.4. *Jos jono (x_n) suppenee kohti lukua a, niin sen jokainen osajono suppenee kohti lukua a.*

Kääntäen jos jonon (x_n) jokainen osajono suppenee, niin myös (x_n) suppenee.

Todistus. Oletetaan, että $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Olkoon (y_k) jonon (x_n) osajono ja

$$y_k = x_{n_k}, \quad n_k \geq k.$$

Koska $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, niin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen n_ε, että

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq n_\varepsilon.$$

Jos $k \geq n_\varepsilon$, niin $n_k \geq k \geq n_\varepsilon$ ja

$$|y_k - a| = |x_{n_k} - a| < \varepsilon, \text{ kun } k \geq n_\varepsilon.$$

Siten $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = a$.

Käänteinen väite on selvä, sillä (x_n) on itsensä osajono. □

Huomautus B.3.5. Lause B.3.4 antaa keinon todistaa, että jono hajaantuu. Riittää löytää osajono, joka ei suppene, tai kaksi osajanonoa, jotka suppenevat eri lukuja kohti. Muista kuitenkin, että yhden osajonon suppeneminen *ei takaa* alkuperäisen jonon suppenemista.

Esimerkki B.3.6. Jono $x_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, hajaantuu.

Perustelu: $x_n = 0, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \ldots$ Jonolla (x_n) on suppenevat osajonot $(y_k) = (x_{2k})$,

$$x_{2k} = (-1)^{2k}\left(1 - \frac{1}{2k}\right) \to 1, \text{ kun } k \to \infty \quad \text{(parilliset indeksit)}$$

ja $(y_k) = (x_{2k-1})$,

$$x_{2k-1} = (-1)^{2k-1}\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right) \to -1, \text{ kun } k \to \infty \quad \text{(parittomat indeksit).}$$

Koska osajonot suppenevat kohti eri lukuja, niin alkuperäinen jono ei suppene.

Esimerkki B.3.7. Jono

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n \text{ parillinen,} \\ n, & n \text{ pariton} \end{cases}$$

hajaantuu.

Perustelu: $(x_n) = 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \ldots$ Osajono $(y_k) = (x_{2k}) = \left(\frac{1}{2k}\right)$ suppenee ja osajono $(y_k) = (x_{2k-1}) = (2k-1)$ ei ole rajoitettu, joten se hajaantuu. Siis (x_n) hajaantuu.

Lause B.3.8 (Bolzanon–Weierstrassin lause)**.** *Rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono.*

Todistus. Olkoon jono (x_n) rajoitettu. Tällöin on olemassa sellaiset m, $M \in \mathbb{R}$, että $m \leq x_n \leq M$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ Merkitään $a_1 = m$ ja $b_1 = M$. Silloin

$$x_n \in [a_1, b_1] \quad \text{kaikilla } n = 1, 2, \ldots$$

Jaetaan väli $[a_1, b_1]$ kahteen osaan keskipisteestään

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Tällöin ainakin toinen väleistä $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$ sisältää äärettömän monta jonon (x_n) alkiota, sillä jos molemmat sisältäisivät vain äärellisen monta jonon alkiota, niin koko jonossa olisi vain äärellisen monta alkiota.

(Huomaa, että $\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ voi olla äärellinen joukko, mutta sitä ei saa samaistaa jonoon (x_n). Esimerkiksi jonon $(x_n) = 1, 2, 1, 2, \ldots$ alkiot muodostavat joukon $\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\} = \{1, 2\}$.)

Valitaan näistä väli, jossa on äärettömän monta jonon alkiota ja merkitään sitä $[a_2, b_2]$. Jatketaan näin. Olkoon

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

välin $[a_k, b_k]$ keskipiste ja valitaan väleistä $[a_k, c_k]$, $[c_k, b_k]$ se, joka sisältää äärettömän monta jonon alkiota. Merkitään valittua väliä $[a_{k+1}, b_{k+1}]$.

Koska välit $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, ovat sisäkkäisiä suljettuja välejä, niin sisäkkäisten välien periaatteen (lause A.0.43) nojalla on olemassa sellainen $x_0 \in \mathbb{R}$, että

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k].$$

Toisaalta, koska välien $[a_k, b_k]$ pituus

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \cdots = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \to 0, \text{ kun } k \to \infty,$$

niin

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] = \{x_0\}.$$

Konstruoidaan sitten suppeneva osajono. Valitaan $n_1 = 1$, jolloin $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. Valitaan sitten luvut n_{k+1} induktiivisesti niin, että $n_{k+1} > n_k$ ja $x_{n_{k+1}} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$. Tämä on mahdollista, sillä jokainen väli $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ sisältää äärettömän monta jonon (x_n) alkiota.

Nyt $x_{n_k}, x_0 \in [a_k, b_k]$, joten

$$|x_{n_k} - x_0| \leq b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \to 0, \text{ kun } k \to \infty.$$

Siis

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$$

ja (x_{n_k}) kelpaa suppenevaksi osajonoksi. $\square$

Huomautus B.3.9. (1) Suppeneva osajono ei ole yksikäsitteinen. Esimerkiksi jonolla $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$ on suppenevat osajonot $(x_{2k}) = 1, 1, \dots$ ja $(x_{2k-1}) = -1, -1, \dots$

(2) Bolzanon–Weierstrassin lause yleistää monotonisen suppenemisen lauseen. Bolzanon–Weierstrassin lauseen nojalla erityisesti jokaisella rajoitetulla monotonisella jonolla on suppeneva osajono ja monotonisuudesta seuraa, että alkuperäinenkin jono suppenee.

(3) Bolzanon–Weierstrassin lause voidaan todistaa myös monotonisen suppenemisen lauseen avulla, sillä jokaisella jonolla (ilman mitään ehtoja!) on aina monotoninen osajono (harjoitustehtävä).

(4) Voidaan todistaa, että Bolzanon–Weierstrassin lause on yhtäpitävä täydellisyysaksiooman kanssa (harjoitustehtävä).

Esimerkki B.3.10. Osoitetaan, että jokaista $a \in [0, 1]$ kohti on olemassa sellainen jonon

$$(x_n) = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

osajono, joka suppenee kohti lukua a.

Jonon (x_n) alkiot ovat muotoa

$$\frac{m}{k+1}, \quad \text{missä } k = 1, 2, \dots \text{ ja } m = 1, 2, \dots, k,$$

olevia rationaalilukuja. Nämä luvut on järjestetty ryhmiin, joilla on sama nimittäjä $k + 1$, kun $k = 1, 2, \dots$

Selvästi jono (x_n) käy lävitse (numeroi) kaikki välin $]0, 1[$ rationaalipisteet, toisin sanoen

$$\{x_n \mid n = 1, 2, \dots\} = \mathbb{Q} \cap \,]0, 1[\,.$$

Olkoon $a \in [0, 1]$. Haluttu, lukua a kohti suppeneva, osajono löytyy, kun todistetaan seuraava väite: Jokaista $k = 1, 2, \dots$ kohti on olemassa sellainen $x_{n_k} \in \mathbb{Q} \cap \,]0, 1[$, että

$$|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \quad \text{ja} \quad n_k > n_{k-1}.$$

Todistus: Valitaan $n_1 = 1$, jolloin $x_{n_1} = \frac{1}{2}$ ja

$$|x_{n_1} - a| < 1.$$

Oletetaan sitten, että indeksit $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ on valittu niin, että

$$|x_{n_j} - a| < \frac{1}{j}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Väli

$$\left]a - \frac{1}{k+1}, a + \frac{1}{k+1}\right[\bigcap]0,1[$$

on epätyhjä, joten seurauksen A.0.42 nojalla se sisältää äärettömän monta rationaalilukua. Siten on olemassa sellainen $n_{k+1} > n_k$, että

$$|x_{n_{k+1}} - a| < \frac{1}{k+1}.$$

Näin jono (x_{n_k}) saadaan määriteltyä induktiivisesti. Jokaista $k = 1, 2, \dots$ kohti on siis olemassa sellainen x_{n_k}, että

$$|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}.$$

Tästä seuraa, että

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Seuraavat käsitteet ovat tärkeitä analyysin jatkokursseilla. Olkoon (x_n) rajoitettu jono, ts. on olemassa sellainen $M > 0$, että $|x_n| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

(i) Määritellään uusi jono (a_n) asettamalla

$$a_n = \sup\{x_k \mid k \geq n\} = \sup_{k\geq n} x_k.$$

Tällöin

$$a_{n+1} = \sup\{x_k \mid k \geq n+1\} = \sup_{k\geq n+1} x_k \leq a_n$$

(jos $A \subseteq B$, niin $\sup A \leq \sup B$), joten jono (a_n) on vähenevä. Lisäksi

$$\begin{aligned} & -M \leq x_k \leq M \quad \text{kaikilla } k \\ \Longrightarrow\ & -M \leq a_n = \sup_{k\geq n} x_k \leq M \quad \text{kaikilla } n \\ \Longrightarrow\ & |a_n| \leq M \quad \text{kaikilla } n, \end{aligned}$$

joten jono (a_n) on rajoitettu. Lauseen B.2.3 nojalla (a_n) suppenee ja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$. Tälle raja-arvolle (ns. *limes superior*) käytetään merkintää $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} x_k = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

(ii) Muodostetaan vastaavasti jono (b_n), jolle $b_n = \inf\limits_{k\geq n} x_k$, $n = 1, 2, \dots$ Jono (b_n) on kasvava ja kuten edellä nähdään, että $|b_n| \leq M$ kaikilla n. Siten lauseen B.2.3 nojalla (b_n) suppenee ja

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \sup\{b_n \mid n = 1, 2, \dots\}.$$

Tälle raja-arvolle (ns. *limes inferior*) käytetään merkintää $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} x_k = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Huomautus B.3.11. Olkoon (x_n) rajoitettu jono sekä $U = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ ja $L = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$. Todistukset sivuuttaen mainitaan, että tällöin

(i) $L \leq U$,

(ii) on olemassa sellainen osajono (x_{n_k}), että $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = U$,

(iii) on olemassa sellainen osajono (x_{n_l}), että $\lim_{l\to\infty} x_{n_l} = L$,

(iv) Jono (x_n) suppenee jos ja vain jos $L = U$.

Esimerkki B.3.12. Merkitään $U = \limsup_{n\to\infty} x_n$ ja $L = \liminf_{n\to\infty} x_n$.

(1) Olkoon $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Tällöin $U = 1$ ja $L = -1$. ja jono (x_n) hajaantuu (vertaa huomautuksen B.3.11 kohtaan (iv)).

(2) Olkoon $x_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Tällöin $U = L = 1$, joten huomautuksen B.3.11 kohdan (iv) mukaan myös $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ (harjoitustehtävä).

(3) Olkoon $x_n = n(1 + (-1)^n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Tällöin $L = 0$ ja U ei ole olemassa (harjoitustehtävä).

B.4 Cauchyn jono

Määritelmä B.4.1. Jonoa (x_n) sanotaan *Cauchyn jonoksi*, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \text{ aina, kun } n,\, m \geq n_\varepsilon.$$

Määritelmän tarkoitus: Kaikki jonon termit x_n ovat mielivaltaisen lähellä toisiaan, kun n on riittävän suuri.

Huomautus B.4.2. (1) Vaikka Cauchyn jonon määritelmä näyttää melkein samalta kuin jonon raja-arvon määritelmä, siinä on vain jonon termejä eikä mahdollista raja-arvoa.

(2) Ehto voidaan kirjoittaa muodossa:

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon \text{ aina, kun } n \geq n_\varepsilon \text{ ja } p \in \mathbb{Z}_+.$$

Varoitus: Cauchyn ehtoa *ei voi* kirjoittaa seuraavasti: jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|x_n - x_{n+1}| < \varepsilon \text{ aina, kun } n \geq n_\varepsilon$$

eli

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n+1}) = 0.$$

Esimerkiksi käy jono

$$(x_n) = 1,\ 1\frac{1}{2},\ 2,\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{2}{3},\ 3,\ 3\frac{1}{4},\ 3\frac{2}{4},\ 3\frac{3}{4},\ \ldots$$

Silloin $\lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n+1}) = 0$, mutta (x_n) ei ole Cauchyn jono (jono (x_n) ei myöskään suppene).

Esimerkki B.4.3. Osoitetaan, että jono (x_n), $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, on Cauchyn jono.

Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

kun n, $m > \frac{2}{\varepsilon}$. Siten n_ε voidaan valita (esimerkiksi) pienimmäksi kokonaisluvuksi, joka on suurempi kuin $\frac{2}{\varepsilon}$.

Esimerkki B.4.4. Osoitetaan, että (x_n), $x_n = \frac{n+2}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, on Cauchyn jono.

Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \frac{n+2}{n} - \frac{m+2}{m} \right| = \left| \frac{mn + 2m - (mn + 2n)}{nm} \right| = \left| \frac{2m - 2n}{nm} \right| \\ &\le \frac{2}{n} + \frac{2}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

kun n, $m > \frac{4}{\varepsilon}$. Siten n_ε voidaan valita (esimerkiksi) pienimmäksi kokonaisluvuksi, joka on suurempi kuin $\frac{4}{\varepsilon}$.

Esimerkki B.4.5. Osoitetaan, että jono (x_n), $x_n = 1 + (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$, ei ole Cauchyn jono.

On siis osoitettava, että löytyy sellainen $\varepsilon > 0$, että jokaista $N \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa sellaiset n, $m \ge N$, että $|x_n - x_m| \ge \varepsilon$. Koska

$$|x_n - x_{n+1}| = 2,$$

niin edellä voidaan valita $\varepsilon = 2$ ja nähdään, että (x_n) ei ole Cauchyn jono. Huomaa, että kaksi peräkkäistä termiä riittävät vastaesimerkkiin.

Lause B.4.6 (Cauchyn suppenemiskriteeri)**.** *Reaalilukujono (x_n) suppenee jos ja vain jos se on Cauchyn jono.*

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että jono (x_n) suppenee ja $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Tällöin on olemassa sellainen $n_{\frac{\varepsilon}{2}}$, että

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } n \ge n_{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Siten

$$|x_n - x_m| \le |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{kaikilla } n,\, m \ge n_{\frac{\varepsilon}{2}},$$

eli (x_n) on Cauchyn jono.

"$\Leftarrow$": Olkoon (x_n) Cauchyn jono.

Osoitetaan ensin, että jono (x_n) on rajoitettu. Koska (x_n) on Cauchyn jono, niin lukua $\varepsilon = 1$ kohti on olemassa sellainen n_1, että

$$\begin{aligned} &|x_n - x_m| < 1, \text{ kun } n,\, m \ge n_1 \\ \implies &|x_n| \le |x_{n_1}| + |x_n - x_{n_1}| \le |x_{n_1}| + 1, \text{ kun } n \ge n_1. \end{aligned}$$

Lisäksi $|x_n| \le \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_1-1}|\}$, kun $n < n_1$. Täten

$$|x_n| \le \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_1-1}|, |x_{n_1}| + 1\} = M \quad \text{kaikilla } n = 1, 2, \ldots$$

eli jono (x_n) on rajoitettu.

Bolzanon–Weierstrassin lauseen (lause B.3.8) nojalla jonolla (x_n) on suppeneva osajono (x_{n_k}). Merkitään

$$a = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$$

ja osoitetaan, että tämä on myös jonon (x_n) raja-arvo. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$|x_n - a| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a|\,.$$

jokaisella $n,\ k \in \mathbb{Z}$. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Koska (x_n) on Cauchyn jono, niin on olemassa sellainen n'_ε, että

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2},\ \text{kun } n,\ n_k \geq n'_\varepsilon.$$

Koska jono (x_{n_k}) suppenee, niin on olemassa sellainen n''_ε, että

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2},\ \text{kun } n_k \geq n''_\varepsilon.$$

Valitaan kiinteä $n_k \geq \max\{n'_\varepsilon,\ n''_\varepsilon\}$. Silloin

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ \text{kaikilla } n \geq n'_\varepsilon,$$

eli $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. □

Huomautus B.4.7. (1) Todistuksesta nähdään, että Cauchyn jono suppenee jos ja vain jos sillä on yksikin suppeneva osajono. Sama ominaisuus pätee monotonisille rajoitetuille jonoille, mutta ei mielivaltaisille (rajoitetuille) jonoille.

(2) Cauchyn suppenemiskriteeri on yhtäpitävä täydellisyysaksiooman kanssa (harjoitustehtävä).

(3) Lauseen B.4.6 mukaan reaalilukujonon raja-arvoa ei tarvitse tietää, kun osoitetaan, että jono suppenee. Pelkkien jonon alkioiden tarkastelu riittää.

Esimerkki B.4.8. Osoitetaan, että jono (s_n), $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n = 1, 2, \ldots$, suppenee eli raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

on olemassa.

Tehdään tämä osoittamalla, että (s_n) on Cauchyn jono. Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos $m > n$, niin

$$\begin{aligned}
|s_n - s_m| &= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k(k-1)} \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{k+1-k}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{kun } n > \frac{1}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Jos $n \geq m$, niin vaihtamalla edellä lukujen n ja m roolit nähdään, että

$$|s_n - s_m| < \frac{1}{m} < \varepsilon, \quad \text{kun } m > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tästä seuraa, että

$$|s_n - s_m| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n,\ m > \frac{1}{\varepsilon},$$

joten (s_n) on Cauchyn jono ja se suppenee Cauchyn kriteerin nojalla. On mahdollista todistaa, että

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esimerkki B.4.9. Osoitetaan, että jono (s_n), $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n = 1, 2, \ldots$, hajaantuu. Nyt

$$|s_{2n} - s_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Valitaan $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tällöin jokaista $N \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa sellaiset $n \geq N$ ja $m = 2n \geq N$, että

$$|s_{2n} - s_n| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon,$$

joten (s_n) ei ole Cauchyn jono eikä siten suppene.

Esimerkki B.4.10. Osoitetaan, että jono (s_n),

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n},$$

suppenee, toisin sanoen että $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ on olemassa.

Tehdään tämä osoittamalla, että (s_n) on Cauchyn jono. Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoon aluksi $m > n$ ja osoitetaan, että $|s_m - s_n| < \frac{1}{n+1}$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ Tarkastelu on paras jakaa kahteen osaan sen mukaan, onko $m - n$ parillinen vai pariton:

1. Jos $m = n + 2p$ (eli $m - n$ on parillinen luonnollinen luku), niin

$$\begin{aligned}
|s_m - s_n| = |s_{n+2p} - s_n| &= \Big|\sum_{k=n+1}^{n+2p}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\Big| \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \\
&= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right) - \frac{1}{m} \\
&< \frac{1}{n+1} \qquad \text{kaikilla } n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

2. Jos $m = n + 2p + 1$ (eli $m - n$ on pariton luonnollinen luku), niin

$$\begin{aligned}
|s_m - s_n| = |s_{n+2p+1} - s_n| &= \Big|\sum_{k=n+1}^{n+2p+1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m}\Big| \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} \\
&= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\
&< \frac{1}{n+1} \qquad \text{kaikilla } n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Näiden kahden kohdan nojalla

$$|s_m - s_n| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{kun } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Jos toisaalta $n \geq m$, niin vaihtamalla edellä lukujen n ja m roolit nähdään, että

$$|s_n - s_m| < \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} < \varepsilon, \quad \text{kun } m > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tästä seuraa, että

$$|s_n - s_m| < \varepsilon, \quad \text{kun } n, m > \frac{1}{\varepsilon},$$

joten (s_n) on Cauchyn jono ja suppenee Cauchyn kriteerin nojalla.

Lisätieto: Jonon (s_n) raja-arvo on ns. alternoiva harmoninen sarja, johon palataan myöhemmin sarjoja tarkastelevassa luvussa. Voidaan osoittaa, että tämä raja-arvo on

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \ln 2.$$

Huomautus B.4.11. (1) Kurssilla Analyysi III tutkitaan täydellisiä avaruuksia, jotka määritelmänsä nojalla ovat sellaisia, että jokainen Cauchyn jono suppenee.

(2) Reaaliluvut voidaan konstruoida käyttämällä rationaalilukujen Cauchyn jonoja: Olkoot (x_n), (y_n) Cauchyn jonoja, missä $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$, $n = 1, 2, \ldots$ Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ Cauchyn jonoille asettamalla

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0.$$

Reaaliluvut voidaan nyt määritellä tämän ekvivalenssin ekvivalenssiluokkina.

LOPPU